Solución Ejercicio 2

1. - ganancia en continua: $P(s=0) = \frac{G}{10\omega_0^2} = 1$.
   - ensayo: a partir de la gráfica

   $$u(t) = Y(t)\sin(0,1\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\ t + \phi)\ ,\ y(t) \approx Y(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(0,1\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\ t + \phi - \frac{\pi}{4})$$

   Entonces $||P(j0,1\frac{\text{rad}}{\text{seg}})|| = -3\text{dB}\ ,\ arg(P(j0,1\frac{\text{rad}}{\text{seg}})) = -\frac{\pi}{4}$.
   Por lo tanto, como los polos de la planta distan una década entre sí, se está en condiciones de afirmar que $\omega_0 \approx 0,1\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$.

   $$P(s) = \frac{0,1}{(s+0,1)(s+1)}$$

2. *a*) $H(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}\ ,\ G(s) = \frac{1}{1+C(s)P(s)}$.

   b) $sE(s) = sG(s)R(s) = sG(s)\frac{1}{s} = G(s) = \frac{(s+0,1)(s+1)}{s^2+1,1s+0,1(1+k)}$.
   Si $G(s)$ es estable, es posible determinar el error asintótico a partir del teorema del valor final. Para esto, es necesario calcular los polos de $G(s)$ en función de k:

   $$s^2+1,1s+0,1(1+k) = 0 \Rightarrow s = -0,55 \pm \frac{\sqrt{0,81-0,4k}}{2}$$

   por lo tanto, $G(s)$ es estable para todo $k > 0$. El error asintótico resulta:

   $$e_\infty = \lim_{s\to 0^+} G(s) = \frac{1}{1+k}\ ,\ k > 0$$

3. *a*) $H(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+S(s)C(s)P(s)}\ ,\ G(s) = \frac{1}{1+S(s)C(s)P(s)}$.

   b) Nuevamente $sE(s) = G(s)$ pero ahora $G(s)$ resulta:

   $$G(s) = \frac{(s+0,1)(s+1)(s+20)}{s^3+21,1s^2+22,1s+2(1+k)}$$

   por lo que no es posible determinar la estabilidad de $G(s)$ a partir del estudio analítico de todos sus polos en función de k. Sin embargo, es posible determinar la estabilidad de G a partir de un diagrama de Nyquist de la transferencia en lazo abierto del sistema.
   La transferencia del sistema en lazo abierto resulta:

   $$A^{OL}(s) = -S(s)C(s)P(s) = -k\frac{2}{(s+0,1)(s+1)(s+20)}$$

   En la figura 1 se observa el diagrama de Bode y Nyquist de $-A^{OL}(s)$. A partir de estos se puede observar que el sistema no será estable para un valor de k arbitrario.
   La frecuencia de corte del diagrama de Nyquist con la semirrecta real negativa se puede determinar en forma analítica, imponiendo $Im[-A^{OL}(j\omega_c)] = 0$:

   $$si\ Im[-A^{OL}(j\omega_c)] = 0 \Rightarrow Im[(j\omega_c+0,1)(j\omega_c+1)(j\omega_c+20)] = 0$$

   entonces: $-\omega_c^2 + 22,1 = 0 \Rightarrow \omega_c \approx 4,7\frac{\text{rad}}{\text{seg}} \Rightarrow ||A^{OL}(j\omega_c)|| \approx 4,3\times 10^{-3}$.
   Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado será estable mientras $k < ||A^{OL}(j\omega_c)||^{-1} = 232$ y por lo tanto es posible aplicar el teorema del valor final. Para valoras de k superiores, el error diverge.
   En resumen:$e_\infty = \begin{cases} G(s=0) = \frac{1}{1+k} & k < 232 \\ \text{diverge en otro caso} & \end{cases}$

Note en el primer caso, que el error asintótico al escalón puede hacerse arbitrariamente pequeño ajustando el parámetro k en un valor suficientemente grande. Sin embargo, la presencia de polos en alta frecuencia no modelados a priori (como en el segundo caso) puede llegar a provocar inestabilidades, ajustando k en un valor muy grande. Esto conduce naturalmente a realizar diseños con ganancias no muy altas, ya que siempre el modelo utilizado despreciará efectos apreciables en altas frecuencias.

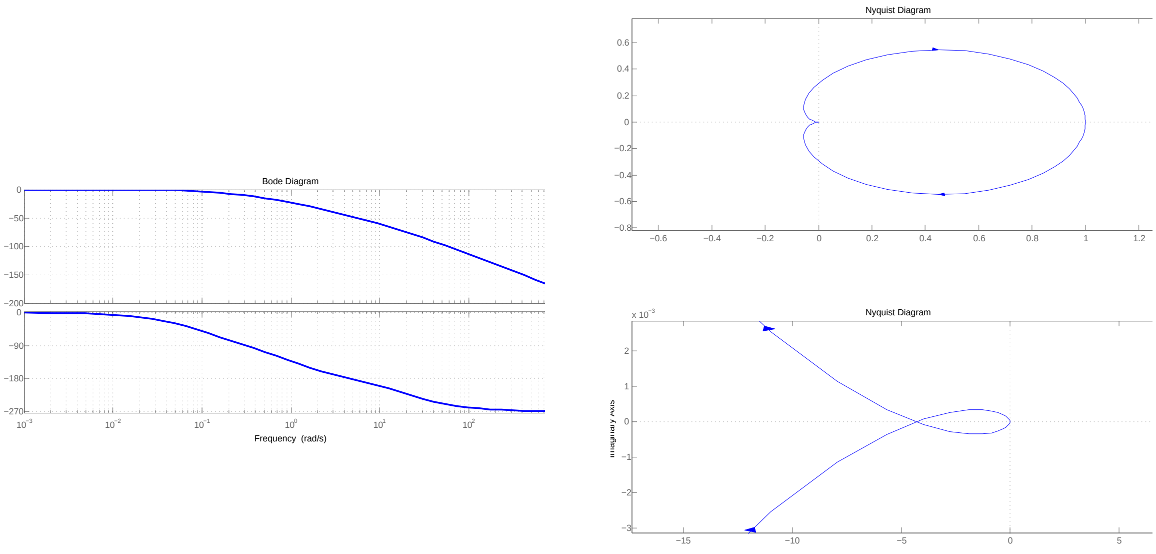
Bode Diagram
Frequency (rad/s)
Nyquist Diagram
Nyquist Diagram
x 10^-3

Figura 1: