Solución Ejercicio 1

a. Sea la figura 1

Observemos que el operacional está en una configuración no inversora de ganancia $1+\frac{Ls}{R}$, por lo tanto la salida del operacional va a ser el doble de V_o.

i) Aplicando nudo en 1 y utilizando lo anterior obtenemos:

$$\frac{V_i - V_o}{2R} = \frac{\left(V_o - \left(1+\frac{Ls}{R}\right)V_o\right)}{R} \Rightarrow V_i - V_o = -2V_o\frac{Ls}{R} \tag{1}$$

$$\Rightarrow V_i = V_o\left(1 - 2\frac{Ls}{R}\right) \tag{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1-2\frac{Ls}{R}}} \tag{3}$$

ii) Cómo mostramos en la figura 2, anulamos v_i, conectamos una fuente de voltaje E entre los terminales A y B y calculamos $Z_{AB} = \frac{E(s)}{I(s)}$.

$$I(s) = \frac{E}{2R} + \frac{E - \left(1+\frac{Ls}{R}\right)E}{R} = \frac{E}{2R}\left(1 - 2\frac{Ls}{R}\right) \tag{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{AB} = \frac{2R}{1-2\frac{Ls}{R}}} \tag{5}$$

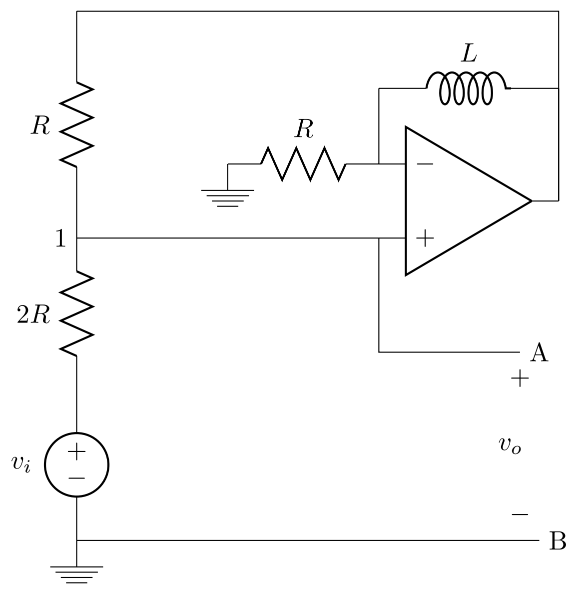

Figura 1: Circuito del Ejercicio 1

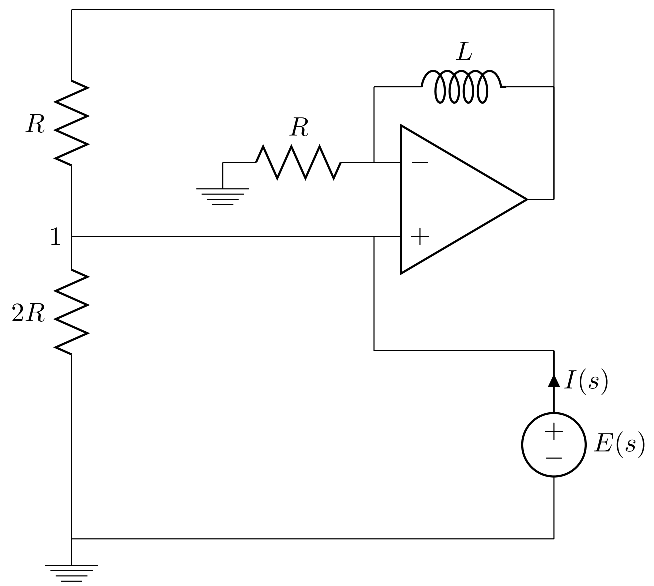

Figura 2: Cálculo de impedancia vista

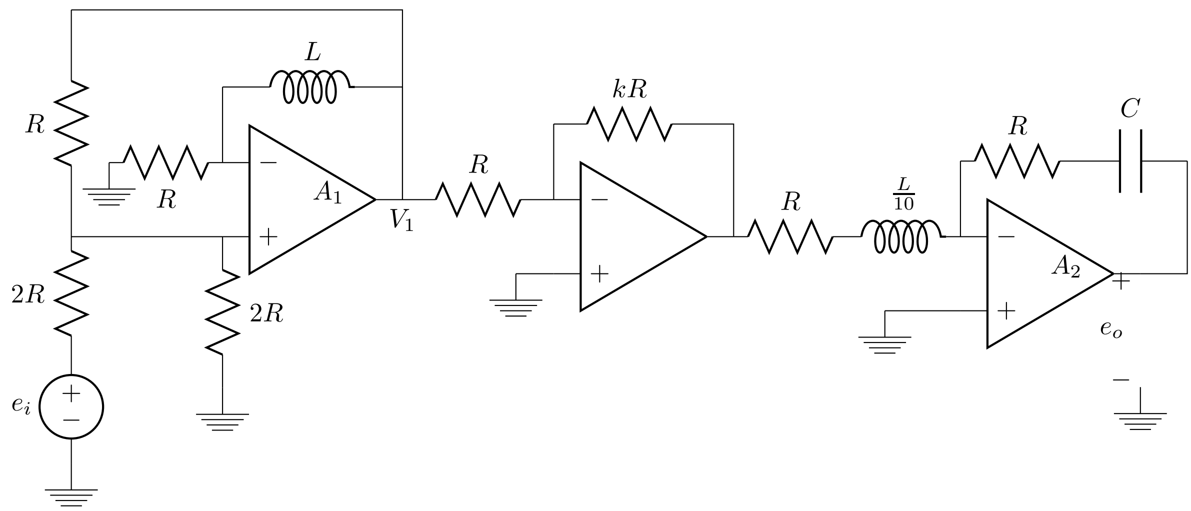

Figura 3: Circuito de la parte a del Ejercicio 1

b. Abrimos el lazo a la salida del operacional A_2, para lo cual anulamos la fuente u, inyectamos una señal e_i y medimos la salida e_o,

   Identificamos el circuito de la parte anterior con una carga $Z_L = 2R$, aplicamos el teorema de Thévenin para determinar el voltaje en la pata

$+$ del operacional A_1.

$$e_1^+ = e_i \times H(s) \times \frac{2R}{2R + Z_{AB}} = e_i \times \frac{1}{1 - 2\frac{Ls}{R}} \times \frac{2R}{2R + \frac{2R}{1-2\frac{Ls}{R}}} \tag{6}$$

$$= e_i \frac{1}{1 - 2\frac{Ls}{R} + 1} = \frac{e_i}{2} \frac{1}{1 - \frac{Ls}{R}} \tag{7}$$

Por el no inversor obtenemos:

$$V_1 = e_1^+ \left(1 + \frac{Ls}{R}\right) = \frac{e_i}{2} \frac{1 + \frac{Ls}{R}}{1 - \frac{Ls}{R}} \tag{8}$$

Luego tenemos dos inversores de ganancias $-K$ y $-\frac{R+\frac{1}{Cs}}{R+\frac{Ls}{10}}$.

La transferencia de lazo abierto queda finalmente :

$$G_{OL} = K \frac{R + \frac{1}{Cs}}{R + \frac{Ls}{10}} \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{Ls}{R}}{1 - \frac{Ls}{R}} = \frac{K}{2} \frac{R + \frac{R\omega_0}{s}}{R + \frac{Rs}{10\omega_0}} \frac{1 + \frac{s}{\omega_0}}{1 - \frac{s}{\omega_0}} \tag{9}$$

$$= \boxed{5K \frac{\omega_0}{s} \frac{(\omega_0 + s)^2}{(\omega_0 - s)(10\omega_0 + s)}} \tag{10}$$

c.

$$A\beta(s) = -5K \frac{\omega_0}{s} \frac{(\omega_0 + s)^2}{(\omega_0 - s)(10\omega_0 + s)}$$

Los diagramas de Bode los mostramos en la figura 4

d. Para usar el criterio de Nyquist tenemos que usar una curva Γ como la de la figura 5 que esquive el polo en el origen.

Mapeamos la curva que esquiva el origen.

$$A\beta\left(re^{j\theta}\right) \xrightarrow{r \to 0} -\frac{K}{2} \frac{\omega_0}{re^{j\theta}} = \frac{k}{2} \frac{\omega_0}{r} e^{j(\pi - \theta)}$$

Como θ varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el mapeo de la curva tiende a un arco de radio que tiende a ∞ cuyo argumento va de π a $\frac{\pi}{2}$

Para realizar el diagrama de Nyquist solo necesitamos agregar la información del diagrama de Bode y obtenemos la figura 6, el número de polos encerrados por Γ es 1 por lo que tenemos que hacer que el Nyquist encierre al -1 una vez en sentido antihorario ($N = -1$) para ello hallamos el punto de corte $-\alpha$ con el eje real negativo.

Para hallar α, resolvemos la ecuación $A\beta(j\omega) = -\alpha$, con $\alpha in \Re$:

$$5K\omega_0 (\omega_0 + j\omega)^2 = \alpha j\omega (\omega_0 - j\omega)(10\omega_0 + j\omega) \tag{11}$$

$$\overbrace{\frac{5K}{\alpha}}^{A} \omega_0 \left(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\omega_0 j\omega\right) = 9\omega_0\omega^2 + j\omega\left(10\omega_0^2 + \omega^2\right) \tag{12}$$

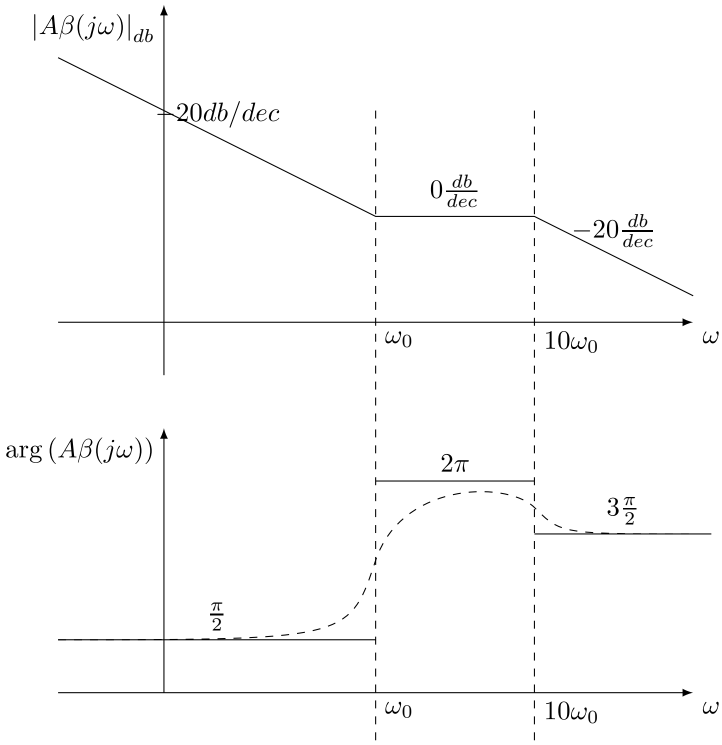

Figura 4: Diagramas asintóticos de Bode

Igualando partes reales a ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$A\omega_0^2 = (9 + A)\,\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \frac{A}{9 + A} \tag{13}$$

Sustituyendo en la ecuación que nos da la parte imaginaria:

$$2A\omega_0^2 = 10\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2 A}{9 + A} \Rightarrow 2A^2 + 7A - 90 = 0 \tag{14}$$

Al resolver la ecuación de segundo grado nos da dos valores posibles para A ($A_1 \simeq 5{,}2$ y $A_2 = -8{,}7$) pero el segundo ocurre para una frecuencia imaginaria (ver ecuación 13)

Por lo tanto $5K = A_1\alpha$, como $\alpha > 1$ para que el sistema sea estable entonces $\boxed{k > \frac{A_1}{5} \simeq \frac{5{,}2}{5} = 1{,}04}$

En realidad el diagrama de Bode ya nos mostraba que el punto de corte con el semieje real negativo se iba a dar a una frecuencia menor que ω_0 por lo que podríamos haber despreciado el término $j\omega$ respecto a $10\omega_0$, en ese caso las cuentas serían algo más sencillas y obtendríamos $\alpha = K$. Por lo cual el criterio de estabilidad daría $\boxed{K > 1}$. es importante observar que si bien el error es de un 4 % el criterio dado por la aproximación nos dice

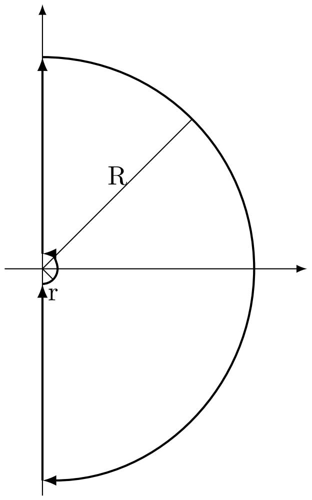

Figura 5: Curva Γ

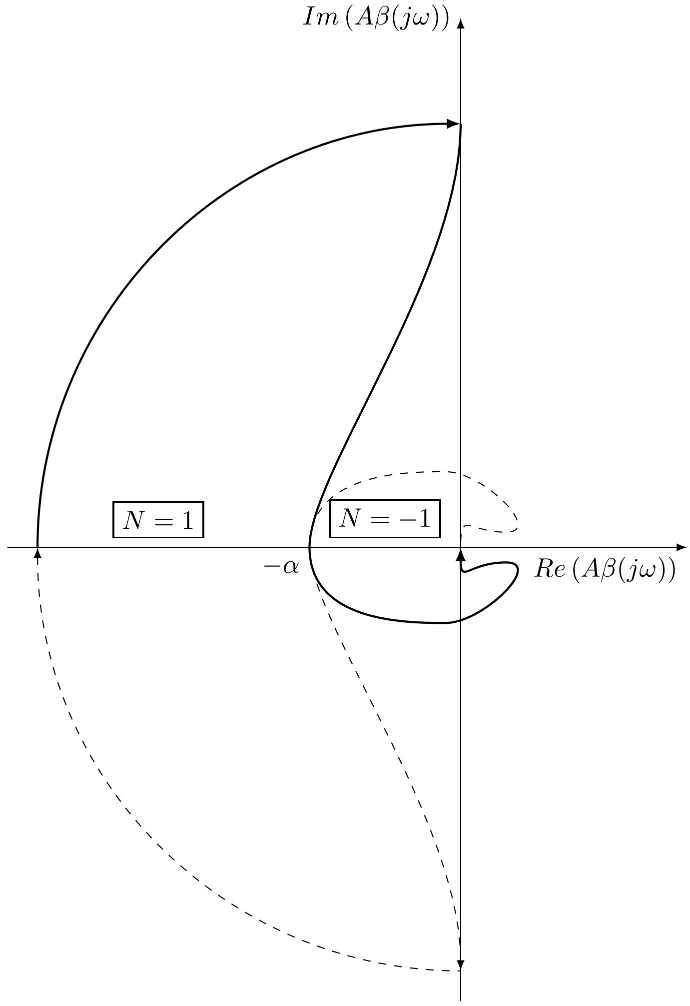

Figura 6: Diagrama de Nyquist

que el sistema sería estable entre 1 y 1,04 cuando esto no es así, al realizar aproximaciones es importante darse un margen de ganancia que compense los errores propios de la aproximación, o asegurarse que el error lo estamos cometiendo hacia el lado que nos "sirve". En este caso claramente no es así ya que necesitamos que K esté por encima de un determinado valor y la aproximación nos da un valor menor, es decir que al aproximar estamos diciendo que la ganancia del sistema cuando tiene fase π es mayor que la que realmente tiene. Observar que el efecto del polo en $-10\omega_0$ si bien es chico por lo lejano tira hacia abajo la ganancia. Por lo cual la ganancia real va a ser menor que la calculada en la aproximación.