Sistemas Lineales 2

Examen, 19 de diciembre de 2011

- Escriba **nombre y apellido** en todas las hojas.
- Utilice las hojas de un solo lado. Resuelva problemas diferentes en hojas diferentes.
- Sea prolijo. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Explique y detalle todos sus pasos. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, Ud. podría perder los puntos de la pregunta.
- Al entregar cuente las hojas y firme la planilla.
- No escriba ni raye el sobre.

Ejercicio 1

1. *a*) No es internamente estable, ya que cualquier condición inicial no nula (corriente en la bobina o tensión en el condensador) provocará que el circuito oscile. Si bien cruzará por cero periódicamente, la respuesta propia del circuito no se anulará, para t tendiendo a infinito.

   b) La tensión en el condensador del circuito del cuadro será:

$$v_C(t) = Y(t)V_1\cos(\omega t)\ ,\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y esto es independiente del comportamiento del resto del circuito.
El resto del circuito es un Schmidt Trigger con una ventana de histéresis que depende de la relación entre las resistencias $R_1,\ R_2$ y R_3.
Llamándole D_2 y D_3 a los diodos en serie con R_2 y R_3 respectivamente, si $y = +V_{CC} \Rightarrow D_2 = ON\ y\ D_3 = OFF$ ($i_{D2} = \frac{+V_{CC}}{R_2+R_1} > 0$, $v_{D3} = -\frac{R_2}{R_1+R_2}V_{CC} < 0$). Esta situación se cumple mientras $v_C < \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{CC}$.
Si $y = -V_{CC} \Rightarrow D_2 = OFF\ y\ D_3 = ON$ ($v_{D2} = -\frac{R_3}{R_1+R_3}V_{CC} < 0$, $i_{D3} = \frac{V_{CC}}{R_1+R_3} > 0$), cumpliéndose si $v_C < -\frac{R_1}{R_1+R_3}V_{CC}$.
Con las relaciones dadas, la ventana de histéresis resultante, se muestra en la figura 1.
Inicialmente, la tensión del condensador es $V_1 > \frac{\sqrt{3}}{4}V_{CC}$ y por lo tanto la tensión de salida

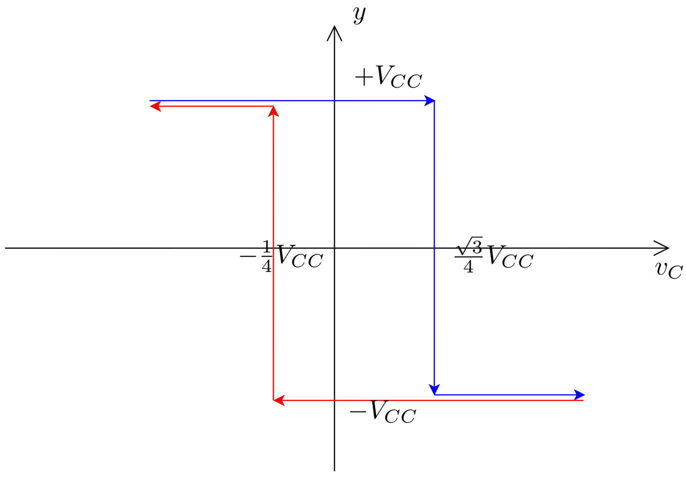

Figura 1:

será $v_o = -V_{CC}$ hasta un tiempo t_1.

$$t_1:\ V_1\cos(\omega t_1) = -\frac{1}{4}V_{CC} \Rightarrow t_1 = \omega^{-1}\text{arcos}(-\frac{1}{2}) = \omega^{-1}\frac{2\pi}{3}.$$

Para $t > t_1$ la tensión sera $+V_{CC}$ hasta un tiempo t_2.

$$t_2:\ V_1\cos(\omega t_2) = \frac{\sqrt{3}}{4}V_{CC} \Rightarrow t_2 = \omega^{-1}\text{arcos}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \omega^{-1}\frac{11\pi}{6}.$$

La próxima conmutación será en un tiempo t_3, que dista un período de t_1:

$$t_3 = t_1 + \omega^{-1} 2\pi$$

Luego de la etapa transitoria $0 < t < t_1$ el circuito entra en régimen, produciendo una onda cuadrada con un período de $T = t_3 - t_1$. La tensión de salida se muestra en la figura 2.

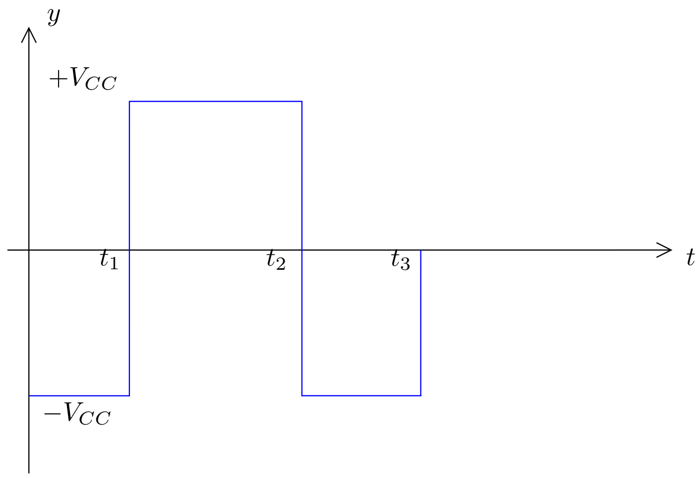

Figura 2:

2. *a*)

$$C\dot{v_C} = \frac{v_s - v_C}{R} \ , \ v = v_C$$

$$\begin{aligned} \dot{v_C} &= -\frac{1}{RC} v_C + \frac{1}{RC} v_s \\ v &= v_C \end{aligned}$$

El sistema es internamente estable, ya que los valores propios de la matriz A (escalar en este caso) son $\lambda = -\frac{1}{RC} < 0$

b) Por superposición: $V(s) = \frac{1}{RCs+1} V_s(s) + \frac{RC}{RCs+1} V_2$, donde la respuesta forzada y la respuesta libre resultan:

$$V_f(s) = \frac{1}{RCs+1} V_s(s) \ , \ V_l(s) = \frac{RC}{RCs+1} V_2.$$

c) Como el sistema es internamente estable, entonces es BIBO estable. Por lo tanto admite respuesta en régimen. También puede observarse en los polos de la transferencia de la respuesta forzada.

3. La entrada periódica a considerar es la de la figura 2. Tomando $T^* = t_2 - t_1$, $T = t_3 - t_1$ y el dato previo del condensador del filtro como v_{C0}. Considerando la entrada total en un período:

$$v_s = Y(t)V_{CC} - 2V_{CC}Y(t - T^*) \Rightarrow V_s(s) = \frac{V_{CC}}{s}(1 - 2e^{-T^* s})$$

.

$$V(s) = \frac{V_{CC}}{s}\left(\frac{1}{RCs+1}\right)(1 - 2e^{-T^* s}) + \frac{RC}{RCs+1} v_{C0}$$

entonces

$$v(t) = Y(t)V_{CC}(1 - e^{-t/RC}) - 2V_{CC}Y(t - T^*)(1 - e^{-(t-T^*)/RC}) + Y(t) v_{C0} e^{-t/RC}$$

Para que la respuesta sea periódica, se debe cumplir que $v_{C0} = v(t = T) \Rightarrow v_{C0} = \frac{V_{CC}(2e^{-(T-T^*)/RC} - e^{-T/RC} - 1)}{1 - e^{-T/RC}}$
La tensión de salida en régimen se muestra en la figura 3.

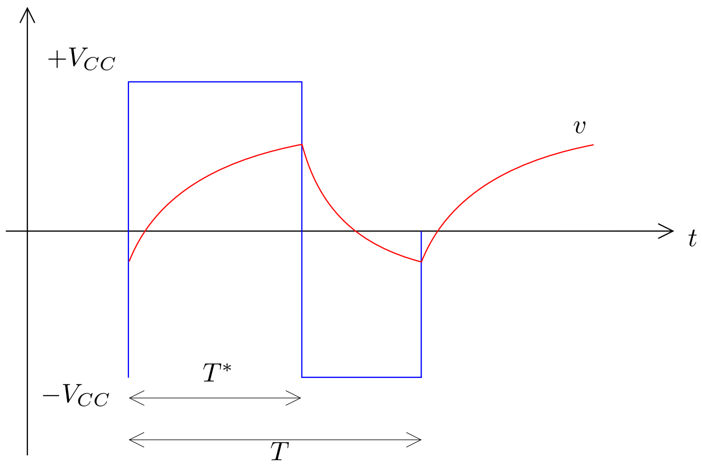

Figura 3:

4. La transferencia del circuito pasabajos es $H(s) = \frac{1}{RCs+1}$, que posee una ganancia en continua $H(0) = 1$. Por lo tanto, el valor medio de la tensión de salida es igual al valor medio de la tensión de entrada. Entonces:
$$\overline{v} = \frac{V_{CC}}{6}.$$
La tensión sobre la resistencia se puede determinar como: $v_R(t) = v_s(t) - v(t) \Rightarrow \overline{v_R} = 0$ (observar que el circuito es un filtro pasaaltos considerando la tensión de salida como v_R).