

Sistemas Lineales 2 - Examen Final

- Escriba **nombre y apellido** en todas las hojas.
- Utilice las hojas de **un solo lado**. Resuelva problemas diferentes en **hojas diferentes**.
- Sea prolijo. **Explique** y detalle bien todos sus pasos. Exprese sus resultados exactamente **en el formato pedido**. Recuerde, que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.
- Se recuerda que para aprobar esta parte del examen es necesario tener al menos un problema completo y bien. **Revise sus respuestas**.

Problema 1.- En este problema, todos los amplificadores operacionales se modelan como ideales y además supondremos que operan en la zona lineal. Considere el circuito que se muestra en la Figura 1 en donde $R > 0$ y $C_1 = C_2 = C_3 = C > 0$. Convenientemente definimos $\tau = RC$.

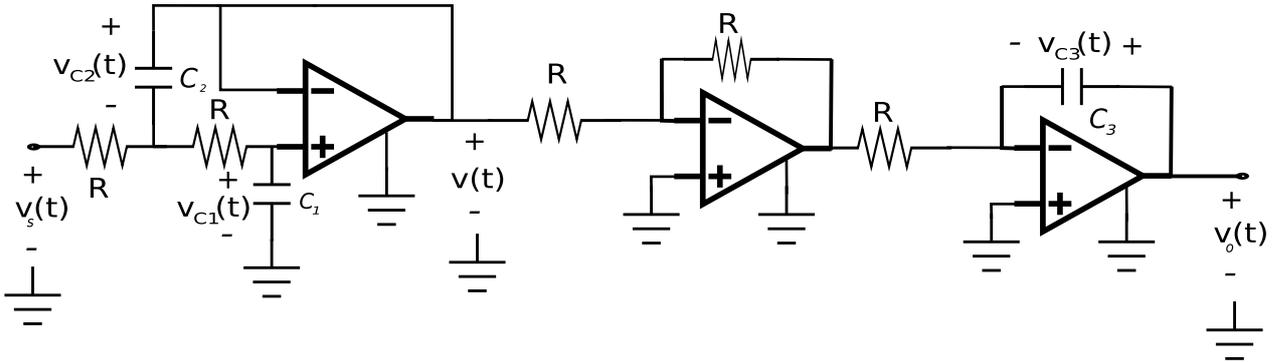


Figure 1: Circuito Correspondiente al Problema 1.

- (a) Halle una descripción, para el comportamiento dinámico de dicho circuito, en la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv_S(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x(0) = x_0,$$

con $x(t) = \begin{pmatrix} v_O(t) \\ v(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}$. La señal que se toma como salida del sistema (es decir la señal que nos interesa observar o medir) es $y(t) = v_O(t)$, y la señal que se toma como entrada es $v_S(t)$. Escriba la ecuación de salida en la forma

$$y(t) = Ex(t) + Dv_S(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Expresé las matrices A , B , E , y D solo en términos de τ . Expresé x_0 solo en términos de $v_{C1}(0^-)$, $v_{C2}(0^-)$, $v_{C3}(0^-)$, y τ .

- (b) Halle para el sistema arriba mencionado (con entrada v_S y salida v_O) la respuesta al impulso h , y también $H = \mathcal{L}\{h\}$. Expresé $h(t)$ solo en términos de τ y t , y $H(s)$ solo en términos de τ y s . Responda a las siguientes preguntas, explicando en cada caso.

- (i) ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_1$?
- (ii) ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_{1,e}$?
- (c)
- (i) Determine si el sistema bajo consideración es o no es internamente estable. Explique.
- (ii) Determine si el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$, es o no es BIBO estable. Explique.
- (d) Asuma aquí que $v_{C1}(0^-) = V_1$, $v_{C2}(0^-) = V_2$, $v_{C3}(0^-) = V_3$, y que $v_S(t) = V$, $t \geq 0$. Halle, para este caso, la respuesta $y(t)$ para todo $t \geq 0$. Expresar su resultado solo en términos de V_1, V_2, V_3, V, τ , y t .
- (e) Considere ahora el circuito mostrado en Figura 2 en donde $k > 0$ y en donde el Circuito 1 es el mostrado en Figura 1. Se requiere estudiar la estabilidad BIBO de este sistema que esta conformado por la interconexión de circuitos lineales e invariantes en el tiempo. A tales efectos, las partes (i) y (ii), que siguen, conciernen a este estudio.
- (i) Halle la función de transferencia L correspondiente a esta interconexión. Expresar $L(s)$ solo en términos de k, τ y s .
- (ii) Haga el gráfico de Nyquist correspondiente, y use el Criterio de Estabilidad de Nyquist a efectos de determinar para que valores de $k > 0$ la interconexión es BIBO estable. (Atención: No use aproximaciones en este análisis.)

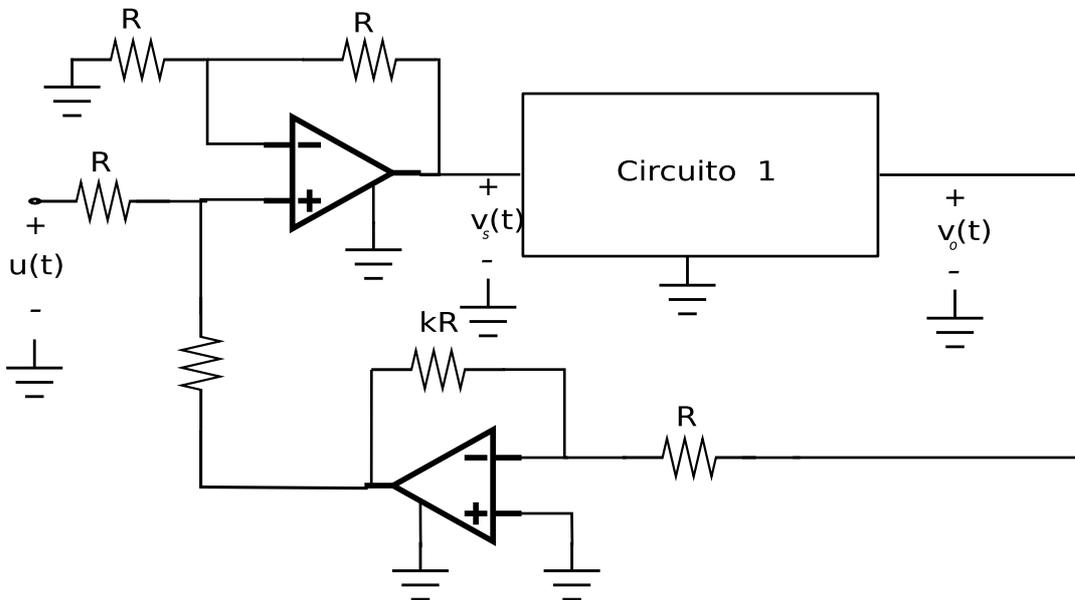


Figure 2: Circuito Correspondiente al Problema 1.

- (f)
- (i) Halle la función de transferencia que relaciona la entrada $U = \mathcal{L}\{u\}$ con la salida $V_O = \mathcal{L}\{v_O\}$. Expresar dicho resultado solo en términos de k, τ , y s .
- (ii) Determine para que valores de $k > 0$ el polinomio denominador de la transferencia hallada en la parte anterior (i) tendrá todas sus raíces con partes reales negativas. Explique.

Problema 2.- Considere el circuito \mathcal{N} mostrado en la Figura 3 (en donde $R > 0$ y $C > 0$) el cual se muestra conectado a una carga arbitraria a través de dos terminales 1 y 1' según muestra dicha Figura 3. Además, en dicho circuito \mathcal{N} se asumirá genéricamente que $v_1(0^-) = v_{01}$.

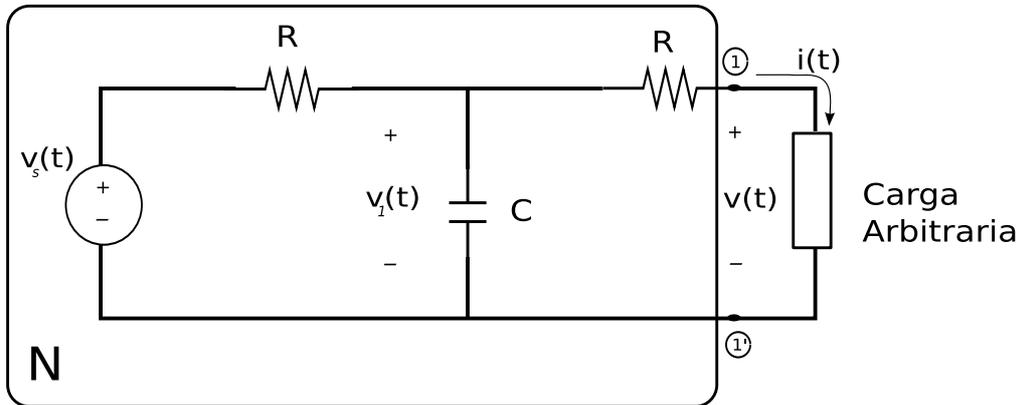


Figure 3: Circuito Correspondiente al Problema 2.

- (a) Halle el Circuito Equivalente de Thévenin, en el dominio de Laplace, al circuito \mathcal{N} (de Figura 3) desde el punto de vista de los terminales 1 y 1'. Es decir, halle $E_{OC}(s)$ y $Z_{EQ}(s)$, solo en términos de R , C , v_{01} , $V_S(s) = \mathcal{L}\{v_S(t)\}(s)$, y de s , tal que el Circuito Equivalente de Thévenin (en el dominio de Laplace) que muestra la Figura 4, verifica la condición que se muestra en dicha Figura 4, en donde $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}(s)$, $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}(s)$.

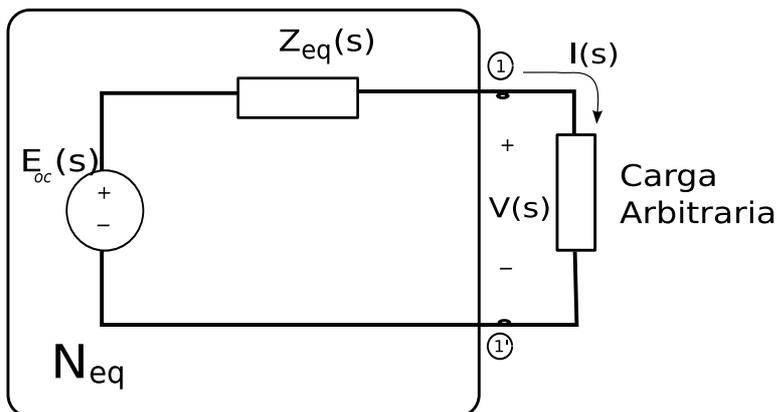


Figure 4: Circuito Correspondiente al Problema 2.

- (b) Sea aquí $v_S(t) = V_0$, $t \geq 0$, y asumamos aquí que la carga arbitraria que se muestra en Figura 3 es un capacitor con capacitancia C . Use lo que ha hallado en la parte (a) para hallar, en este caso, $i(t)$ y $v(t)$ para todo $t \geq 0$, sabiendo que $v(0^-) = v_{02}$. Expresé sus resultados solo en términos de V_0 , v_{01} , v_{02} , $\tau = RC$, R , y t .
- (c) Considere el circuito de la Figura 5, el cual se encuentra inicialmente relajado, y en donde la fuente i_S esta definida como $i_S(t) = I_0$, $t \geq 0$. Use lo hallado en la parte (b) (o en su defecto, use algún otro método) para hallar $i_R(t)$ para todo $t \geq 0$. Expresé su resultado solo en términos de I_0 , τ , y t .

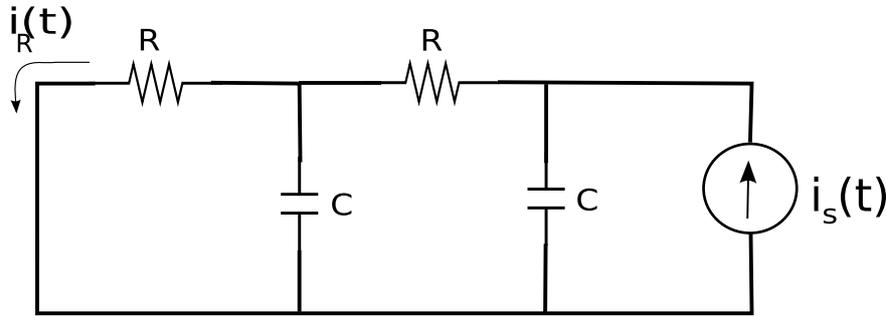


Figure 5: Circuito Correspondiente al Problema 2.

- (d) Asumiremos ahora que la carga arbitraria que se muestra en Figura 3 es una línea de transmisión, sin pérdidas, de longitud $l > 0$, con impedancia característica $Z_0 > 0$ y velocidad de fase $v_P > 0$, inicialmente relajada, y en cuyo extremo $z = l$ se conecta como carga un resistor cuya resistencia es $R_L = R$. El extremo $z = 0$ de la línea de transmisión se conecta a los terminales 1 y 1', así $v(0, t) = v(t)$ (donde $v(t)$ se muestra en Figura 3). Asumiremos que la línea de transmisión es tal que se verifica que $Z_0 = R$. Asumiremos también que $v_{01} = 0$. Por conveniencia definimos $T = \frac{l}{v_P}$. Bajo estas condiciones generales:

- (i) Halle la función de transferencia, H , correspondiente al sistema cuya entrada es $v_S(\cdot)$ y cuya salida es $v(l, \cdot)$. Exprese $H(s)$ solo en términos de τ , T y s .

Recuerde que la transformada de Laplace de la solución general de las Ecuaciones del Telegrafista para una línea de transmisión sin pérdidas que esta inicialmente en reposo (y esta conectada a una red con generador y a una red de carga inicialmente en reposo) es

$$V(z, s) = V_+(s) e^{-\frac{z}{v_P} s} + V_-(s) e^{\frac{z}{v_P} s}, \quad I(z, s) = \frac{1}{Z_0} (V_+(s) e^{-\frac{z}{v_P} s} - V_-(s) e^{\frac{z}{v_P} s}), \quad \text{donde}$$

$$V_+(s) = \frac{1}{(1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-\frac{2l}{v_P} s})} \frac{Z_0}{(Z_0 + Z_g(s))} V_g(s), \quad V_-(s) = V_+(s)\Gamma_L(s)e^{-\frac{2l}{v_P} s}.$$

- (ii) Halle la respuesta al impulso, h , del sistema considerado en la parte anterior cuya función de transferencia es H . Exprese $h(t)$ solo en términos de τ , T y t .
- (iii) Determine si el sistema considerado en la parte (i) (cuya función de transferencia es H) es o no es BIBO estable. Explique.