EJERCICIO 1. 2º parcial 2012

a) $i_1 = C\dot{v}_1 = -\dfrac{v_2}{R}$

$i_2 = C\dot{v}_2 = -\dfrac{v_3}{R}$

$i_3 = C\dot{v}_3 = -\dfrac{v_3}{R} + \dfrac{v_2 - v_3 - (v_1 - u)}{R}$

$RC = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$y = v_2$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = 0.$$

b. $$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 1 & -1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2(s+2) + 1 + s = s^3 + 2s^2 + s + 1$$

$$\{\text{Autovalores de } A\} = \{\text{raíces de } s^3 + 2s^2 + s + 1\} = \left\{ \begin{array}{l} -1{,}7549 \\ -0{,}1226 \pm j\, 0{,}7549 \end{array} \right\}$$

ES INTERNAMENTE ESTABLE pues sus autovalores tiene parte real < 0.

c. TODOS LOS AUTOVALORES TIENEN $Re < 0$. AL FORMAR LA TRANSFERENCIA $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ a lo sumo se cancelará alguno, por lo que los polos de la transferencia tendrán también $Re < 0$

$\Rightarrow$ SE PUEDE AFIRMAR LA ESTABILIDAD BIBO.

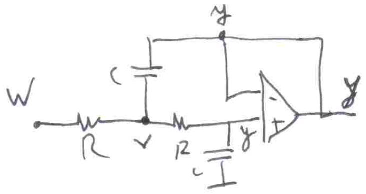
d. la entrada llevará al estado $x(t)$ a algún punto de $\mathbb{R}^3$ en $t = 1$.
A partir de ahí, evoluciona con entrada nula.
Por definición de estabilidad interna, $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

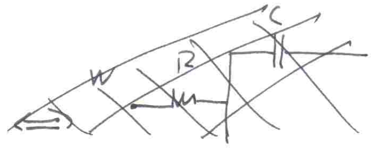
$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = 0$.

EJERCICIO 2

a.

Debo calcular primero la transferencia





(i) $\frac{w-v}{R} + Cs(y-v) + \frac{1}{R}(y-v) = 0$

(ii) $\frac{v-y}{R} = Csy \Rightarrow \frac{V}{R} = y\left[Cs + \frac{1}{R}\right] \Rightarrow V = y\left[\underline{RCs+1}\right]$

En (i): $\frac{W - y(RCs+1)}{R} + \left[Cs + \frac{1}{R}\right]\left[-RCs\,y\right] = 0$

$$\Rightarrow \frac{W}{R} = \left[\frac{RCs+1}{R} + \frac{RCs+1}{R} \cdot RCs\right] y = (RCs+1)\frac{\left[1 + RCs\right]}{R} Y$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{W} = \frac{1}{(RCs+1)(RCs+1)} = \frac{1}{(\tau s+1)(\tau s+1)} = H_1(s)$$

$G_{ol}(s)$: $\rightarrow \boxed{-1} \rightarrow \boxed{-1} \rightarrow \boxed{H_1(s)} \rightarrow \boxed{\frac{-1}{RCs}} \rightarrow$

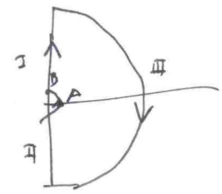
$$G_{ol}(s) = -\frac{H_1(s)}{\tau s} = -\frac{1}{\tau s(\tau s+1)^2}$$

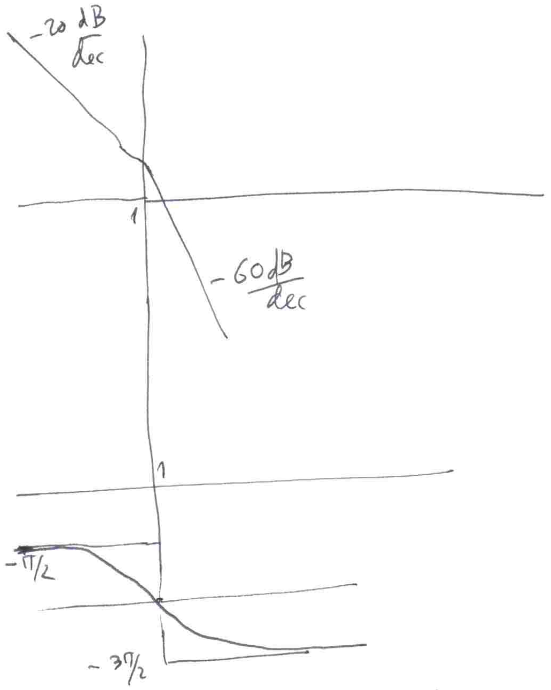
$G_{ol}(s) = -\frac{1}{\tau s(\tau s+1)^2}$; $\boxed{G_{ol}(s) = -\frac{1}{s(s+1)^2}}$ a.

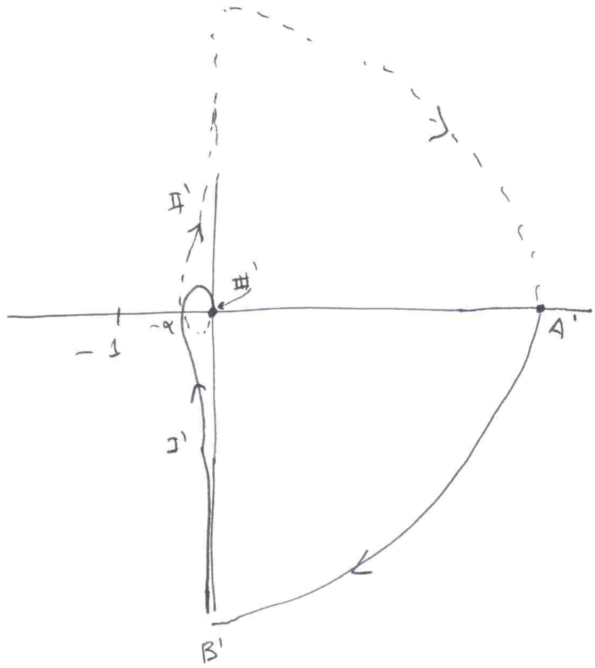
$K=1$

$a=b=1$

5. $L(s) \triangleq -G_{ol}(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$







Desde A → B: $s = re^{j\theta}$ $\quad \theta: 0 \to \pi/2$

Es necesario calcular $\alpha = |L(j\omega_0)|$ para ω_0 tal que $\operatorname{Arg} L(j\omega_0) = -\pi$

Por el diagrama de Bode, $\omega_0 = 1$

$$L(j1) = \frac{1}{j(j+1)^2} = \frac{1}{j[-1+2j+1]} = \frac{1}{-2} = -1/2 \Rightarrow \alpha = 1/2$$

y el punto -1 está a la izquierda. $\Rightarrow N=0 \Rightarrow Z=0$

y el sistema es estable, coherente con el ejercicio.

c. $W(s) = -u(s) + G_{0e}(s)W(s)$

$$\Rightarrow W(s) = -\frac{U(s)}{1-G_{0e}(s)} \Rightarrow \frac{W(s)}{U(s)} = H(s) = \frac{-1}{1+\frac{1}{s(s+1)^2}}$$

d. $W(s) = -\dfrac{1}{1+\frac{1}{s(s+1)^2}}\dfrac{1}{s}$ ↑ escalón

$$w_{t\to+\infty} = \lim_{s\to 0} s\left[-\frac{1}{1+\frac{1}{s(s+1)^2}}\right]\frac{1}{s} = 0$$

↑ TVF Sabemos que es estable

$\boxed{w(t)_{t\to\infty} = 0}$

Ejercicio 2

parte e.

sabemos que $\alpha = \frac{1}{2}$.

Basta multiplicar $G_{oe} \times 2$ para que $L(j\omega_0)$ pase por -1

Multiplicar por 2 la ganancia se logra sustituyendo la resistencia de la realimentación del sumador por una de valor $2R$.

De esa forma $L(j\omega_0) = -1$ y tendremos en lazo cerrado dos polos complejos conjugados en $s = \pm j\omega_0$.