Ejercicio 3

1. *a*) En el circuito de la figura 1, calcule la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

   El operacional A_1 funciona como un amplificador no inversor de ganancia

$$H_1(s) = 1 + \frac{\frac{1}{Cs} + Ls}{R} = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{RCs}$$

   El operacional A_2 funciona como un amplificador inversor de ganancia

$$H_2(s) = -2$$

   Para calcular $V_o(s)$ en función de $V_i(s)$ hacemos un equivalente Thévenin visto desde el condensador de valor $\frac{C}{5}$.

   El voltaje de Vacío es fácil de calcular (el valor medio de las salidas de los operacionales)

$$V_{AB}(s) = \frac{H_1(s) + H_2(s)}{2} V_i(s) = \frac{\frac{LCs^2+RCs+1}{RCs} - 2}{2} = \frac{LCs^2 - RCs + 1}{2RCs}$$

   La impedancia vista es fácil de calcular también, es el paralelo de las dos resistencias.

$$Z_{AB} = \frac{R}{2}$$

   Usando el equivalente Thévenin con el condensador como impedancia de carga nos queda:

$$\begin{aligned} V_o(s) &= V_{AB}(s) \frac{\frac{5}{Cs}}{\frac{5}{Cs} + Z_{AB}} = \frac{LCs^2 - RCs + 1}{2RCs} V_i(s) \frac{\frac{5}{Cs}}{\frac{5}{Cs} + \frac{R}{2}} \\ &= \frac{LCs^2 - RCs + 1}{2RCs} \frac{10}{10 + RCs} V_i(s) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow H(s) = \frac{LCs^2 - RCs + 1}{2RCs} \frac{10}{10 + RCs}}$$

   b) Es el sistema de la figura 1 estable BIBO?

   El sistema es claramente inestable dado que tiene un polo en el origen.

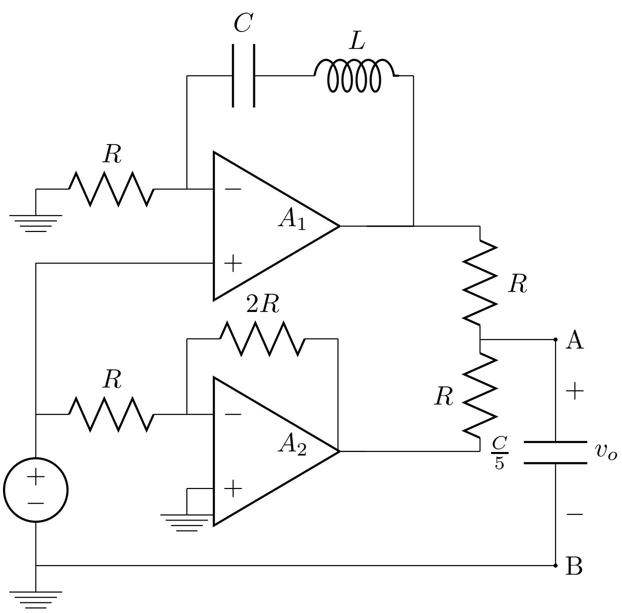

Figura 1: Circuito a resolver

2. En el circuito de la figura 2 se cumple $RC = \frac{L}{R}$

a) Calcule la transferencia de lazo abierto y verifique que queda de la forma:

$$G_{OL} = -K' \frac{s^2 - \omega_0 s + \omega_0^2}{s\,(s + 10\omega_0)}$$

Determine K' y ω_0 en términos de L, C y k

Para calcular la transferencia de lazo abierto anulamos la entrada u y abrimos el lazo a la salida del sumador que al anular la fuente se comporta como un inversor de ganancia $-k$.

Es fácil ver que la transferencia de lazo abierto queda

$$G_{OL} = -kH(s) = -k \frac{LCs^2 - RCs + 1}{2RCs} \frac{10}{10 + RCs}$$

Usando las relaciones dadas lo podemos llevar a la forma

$$G_{OL} = -k \frac{s^2 - \omega_0 s + \omega_0^2}{2\omega_0 s} \frac{10\omega_0}{10\omega_0 + s}$$

Donde $\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{1}{RC}$, solo falta definir $K' = 5k$

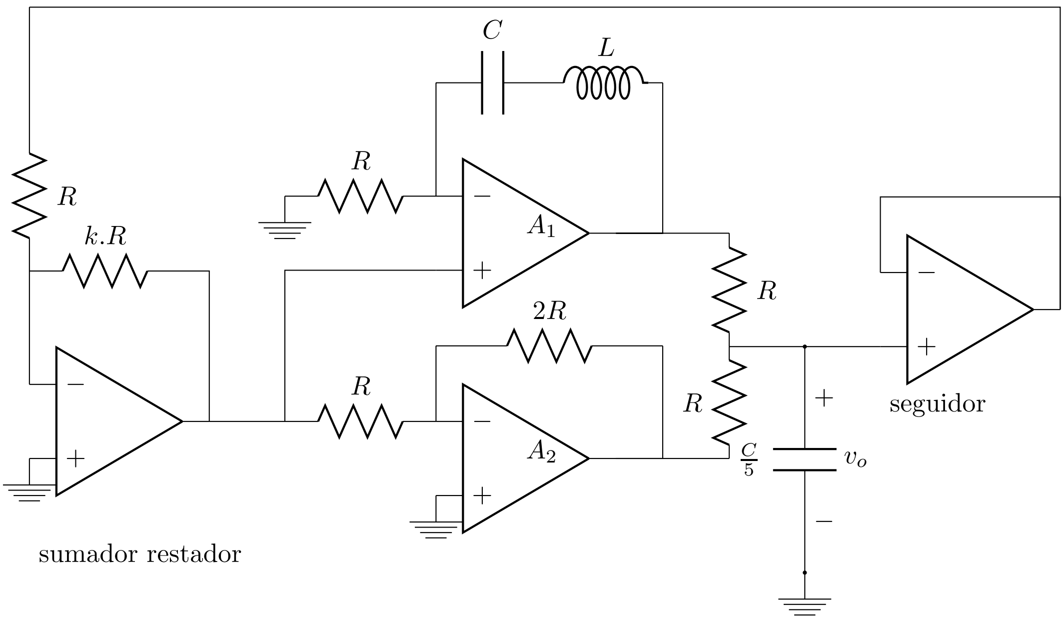

Figura 2: Circuito en lazo cerrado

b) Realice los diagramas de Bode de "$A\beta$" el opuesto de la transferencia hallada en la parte anterior.

Los diagramas de Bode los mostramos en la figura 3

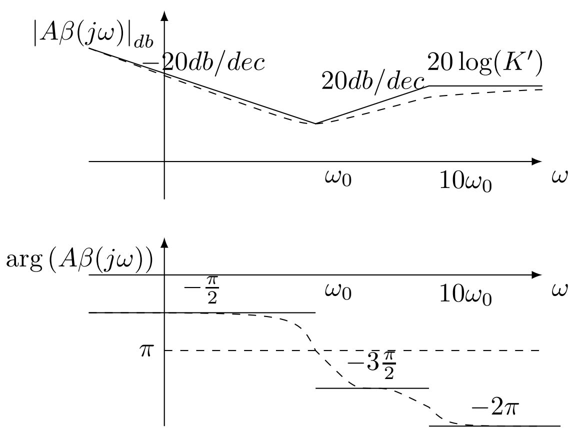

Figura 3: Diagramas asintóticos de Bode

c) Estudie la estabilidad BIBO del sistema de la figura 2 según k utilizando el criterio de Nyquist. Justifique todos los pasos realizados.

Para usar el criterio de Nyquist tenemos que usar una curva Γ como la de la figura 4 que esquive el polo en el origen.

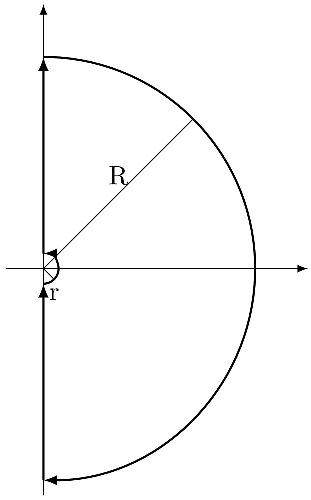

Figura 4: Curva Γ

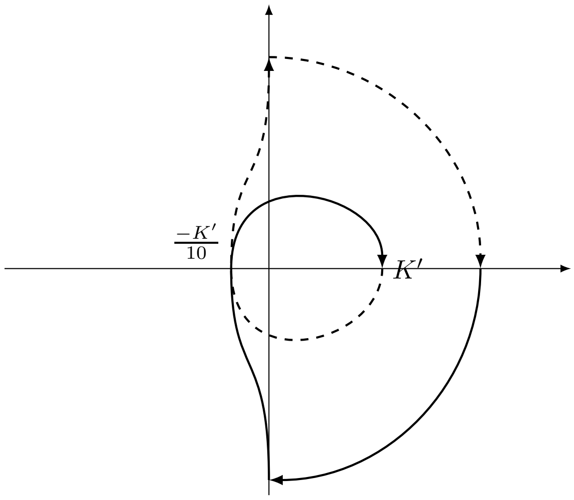

Figura 5: Diagrama de Nyquist

Mapeamos la curva que esquiva el origen.

$$A\beta\left(re^{j\theta}\right) \xrightarrow{r\to 0} K'\frac{\omega_0}{10re^{j\theta}} = K'\frac{\omega_0}{10r}e^{-j\theta}$$

Como θ varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el mapeo de la curva tiende a un arco de radio que tiende a ∞ cuyo argumento va de 0 a $-\frac{\pi}{2}$

Luego del Bode sacamos el resto del mapeo y obtenemos la figura 5, el número de polos encerrados por Γ es nulo por lo que tenemos que hacer que el Nyquist no encierre al -1 para ello hallamos el punto de corte con el eje real negativo. Cómo los polos están a una década es fácil ver en el Diagrama de Bode de fase que la fase de $A\beta(j\omega_0)$ es aproximadamente $-\pi$. Así que calculamos $A\beta(j\omega_0) \simeq \frac{-K'}{10}$

Para que el sistema sea estable entonces se debe cumplir que $\frac{K'}{10} < 1$, es decir $\boxed{K' < 10}$

A pesar de la aproximación realizada para hallar el punto de corte con el semi-eje real negativo, el punto de corte es exactamente $-\frac{K'}{10}$ y se puede verificar con cuentas.