Sistemas Lineales 2 - Primer Parcial

2^{do} semestre 2011

1.-

a)

Cuando $v_i(t) = +E$:
Si supongo $D\ OFF$, la situación es la de la figura 1.1.

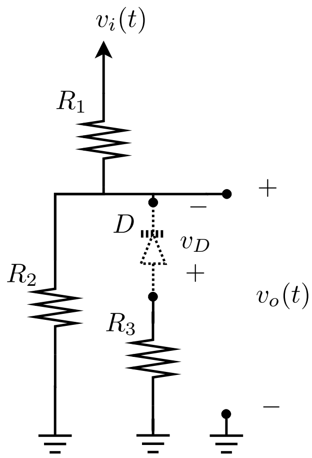

Figura 1.1:

Entonces, vía el divisor resistivo, $v_o(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2}E$.
Verificación: $v_D(t) = -v_o(t) = -\frac{R_2}{R_1+R_2}E \leq 0$ y por lo tanto verifica el estado OFF.
Cuando $v_i(t) = -E$:
Si supongo $D\ ON$, la situación es la de la figura 1.2.
Razonando de igual modo que antes se obtiene $v_o(t) = -\frac{R_2//R_3}{R_2//R_3+R_1}E = -\frac{R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}E$.
Verificación: $i_D(t) = -\frac{v_o(t)}{R_3} = \frac{R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}E \geq 0$ y por lo tanto verifica el estado ON.
Como el circuito no tiene memoria (no tiene capacidades ni inductancias) el estado del circuito depende solamente del estado del diodo. Como el estado del diodo depende solamente de la entrada $v_i(t)$, entonces el circuito se encuentra siempre en régimen. El voltaje de salida $v_o(t)$ se puede observar en la figura 1.3.

b)

No, no se trata de un circuito lineal porque tiene un diodo (no lineal) que es esperable que conmute. Adicionalmente tiene un operacional que, por la realimentación positiva, es esperable que sature. Otro argumento es que el circuito no tiene entrada pero sí salida :) .

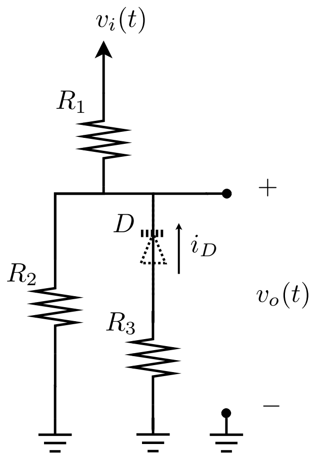

Figura 1.2:

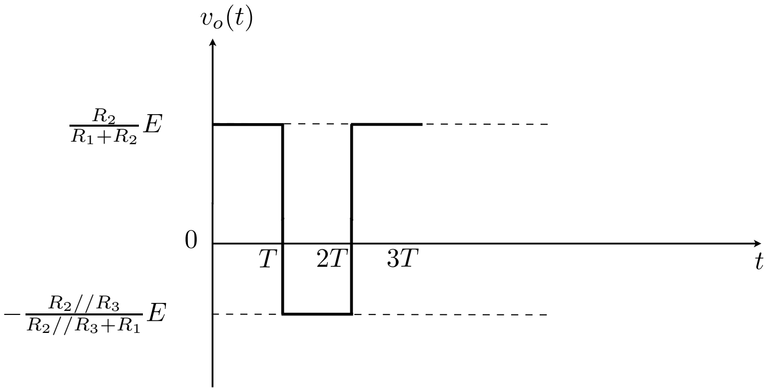

Figura 1.3:

c)

Para $t \geq 0$:
En la entrada inversora:
El dato previo del condensador es 0 y el final es $+V_{CC}$, entonces:

$$e^-(t) = V_{CC}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

En la entrada no inversora:
Por parte **a)**:

$$e^+(t) = +\frac{2R_1}{R_1 + 2R_1}V_{CC} = \frac{2}{3}V_{CC}$$

El consensador comienza a cargarse, tendiendo asintóticamente al valor $+V_{CC}$ y por lo tanto supera el valor de la entrada $e^+(t)$. Llamémosle a ese instante t_1^*.
Entonces:

$$e^+(t) - e^-(t) = +\frac{2}{3}V_{CC} - V_{CC}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \geq 0 \quad \forall t:\ t_1^* \geq t \geq 0$$

Por lo tanto: $\boxed{v_o(t) = +V_{CC} \quad \forall t:\ t_1^* \geq t \geq 0}$ con lo cual se verifica el estado supuesto.

Cálculo de t_1^*:

$$e^+(t_1^*) - e^-(t_1^*) = +\frac{2}{3}V_{CC} - V_{CC}\left(1 - e^{-\frac{t_1^*}{RC}}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{t_1^* = RC\ln(3)}$$

Para $t \geq t_1^*$ ($t' \geq 0$):
Dato previo: $v_C(t' = 0^-) = e^-(t' = 0^-) = e^+(t' = 0^-) = +\frac{2}{3}V_{CC}$.
Supongo $v_o(t') = -V_{CC}$, entonces, razonando del mismo modo:

$$e^-(t') = V_{CC} + \left(\frac{2}{3}V_{CC} - V_{CC}\right)e^{-\frac{t'}{RC}}$$

Por parte **a)**:

$$e^+(t') = -\frac{R_1}{R_1 + R_1}V_{CC} = -\frac{1}{2}V_{CC}$$

El consensador comienza a descargarse, tendiendo asintóticamente al valor $-V_{CC}$ y por lo tanto alcanza el valor de la entrada $e^+(t')$. Llamémosle a ese instante t_2^*.
Entonces:

$$e^+(t') - e^-(t') = -\frac{1}{2}V_{CC} - V_{CC} - \left(\frac{2}{3}V_{CC} - V_{CC}\right)e^{-\frac{t'}{RC}} \leq 0 \quad \forall t' :\ t_2^* \geq t' \geq 0$$

Por lo tanto: $\boxed{v_o(t) = -V_{CC} \quad \forall t' :\ t_2^* \geq t' \geq 0}$ con lo cual se verifica el estado supuesto.
Cálculo de t_2^*:

$$e^+(t_2^*) - e^-(t_2^*) = -\frac{1}{2}V_{CC} - V_{CC} - \left(\frac{2}{3}V_{CC} - V_{CC}\right)e^{-\frac{t'}{RC}} = 0 \Rightarrow \boxed{t_2^* = RC\ln\left(\frac{10}{3}\right)}$$

Para $t' \geq t_2^*$ ($t'' \geq 0$):
Dato previo: $v_C(t'' = 0^-) = e^-(t'' = 0^-) = e^+(t'' = 0^-) = -\frac{1}{2}V_{CC}$.
Supongo $v_o(t'') = +V_{CC}$, entonces:

$$e^+(t'') = +\frac{2}{3}V_{CC}$$

Nuevamente el condensador se carga a un valor asintótico de V_{CC}:

$$e^-(t'') = V_{CC} + \left(-\frac{1}{2}V_{CC} - V_{CC}\right)e^{\frac{-t''}{RC}}$$

y por lo tanto alcanzará el valor de $e^+(t'')$ en un tiempo t_3^*.
Entonces:

$$e^+(t'') - e^-(t'') = \frac{2}{3}V_{CC} - V_{CC} - \left(-\frac{1}{2}V_{CC} - V_{CC}\right)e^{-\frac{t''}{RC}} \leq 0 \quad \forall t'' :\ t_3^* \geq t'' \geq 0$$

Por lo tanto: $\boxed{v_o(t) = V_{CC} \quad \forall t'' :\ t_3^* \geq t'' \geq 0}$.
Cálculo de t_3^*:

$$e^+(t_3^*) - e^-(t_3^*) = \frac{2}{3}V_{CC} - V_{CC} - \left(-\frac{1}{2}V_{CC} - V_{CC}\right)e^{-\frac{t_3^*}{RC}} = 0 \Rightarrow \boxed{t_3^* = RC\ln\left(\frac{9}{2}\right)}$$

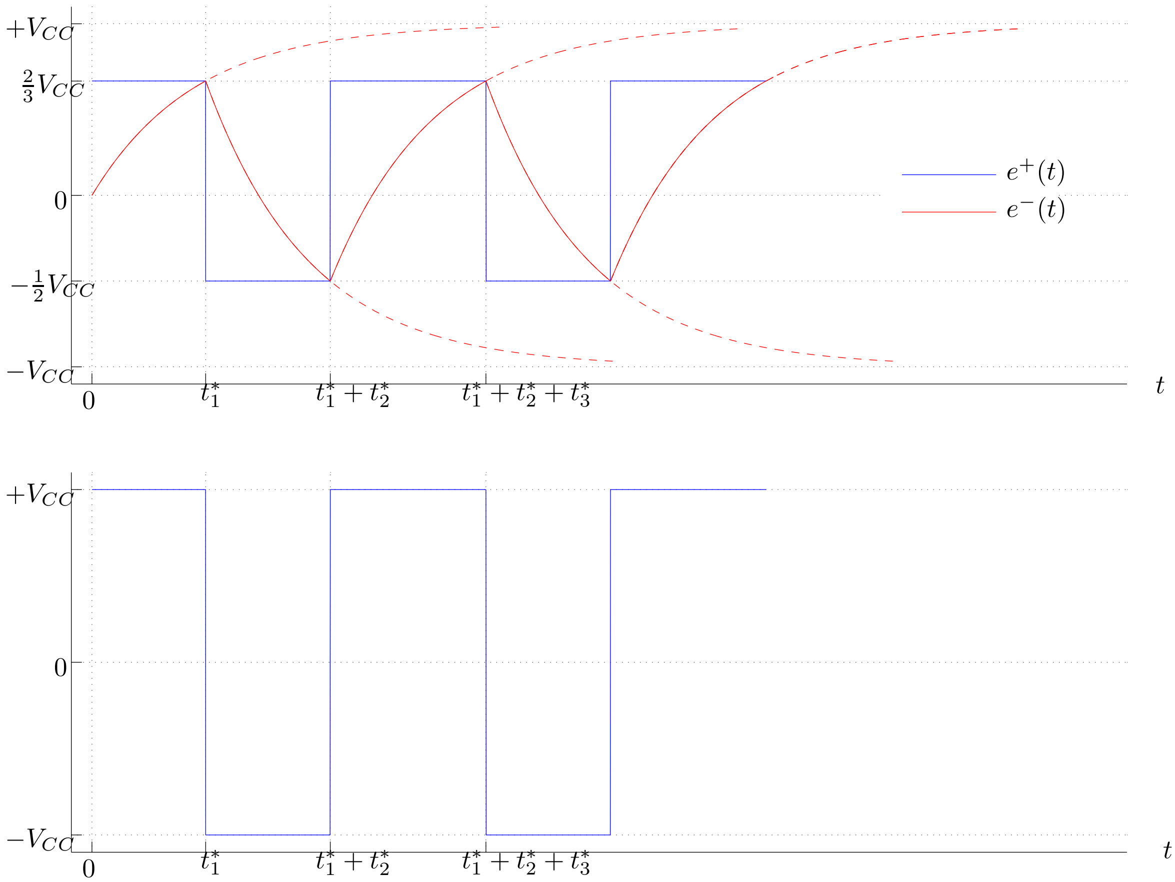

Figura 1.4:

A partir de este instante, el dato previo del condesdador es igual al que poseía en t_1^* y el estado del diodo también es el mismo (OFF). Entonces el estado del circuito es el mismo y el voltaje de entrada también y por lo tanto, el circuito entró en régimen desde $t \geq t_1^*$. El voltaje de salida se muestra en la figura 1.5.

Entonces:

$$\boxed{T = t_2^* + t_3^* = RC\ln(15) \quad , \quad DC = \frac{t_3^*}{T} = 56\,\%}$$

d)

En el intervalo $(0, t_1^*)$ el circuito se comporta en forma idéntica al anterior, entonces:

$$e^+(t) = \frac{2}{3}V_{CC} \quad , \quad e^-(t) = V_{CC}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad , \quad t_1^* = RC\ln(3)$$

Para $t \geq t_1^*$ ($t' \geq 0$):
Dato previo: $v_C(t' = 0^-) = e^-(t' = 0^-) = e^+(t' = 0^-) = +\frac{2}{3}V_{CC}$.
Ahora la salida conmuta a el valor de la fuente negativa:

$$\boxed{v_o(t) = 0}$$

Entonces, el condesador sufrirá una descarga al valor de la fuente, es decir 0:

$$e^-(t') = \frac{2}{3}V_{CC}e^{-\frac{t'}{RC}}$$

La diferencia con la parte anterior, es que el condesador tiende en forma asintótica al mismo valor que la entrada $e^+(t)$:

$$e^+(t') - e^-(t') = -V_{CC}e^{-\frac{t'}{RC}} \quad \forall t' : \ t' \geq 0$$

y por lo tanto la salida no volverá a conmutar. Gráficamente:

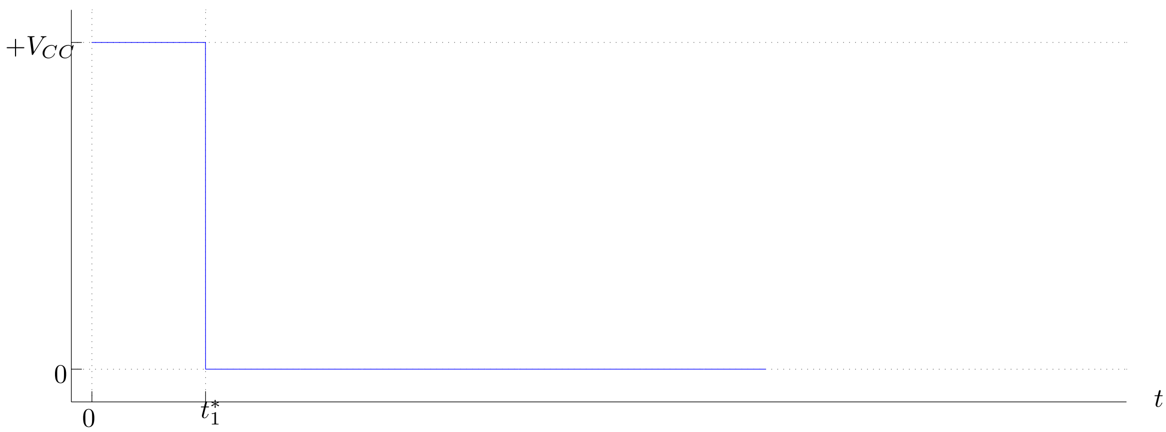

Figura 1.5: