Estabilidad BIBO de Sistemas Lineales

Pablo Monzón

Notas para el curso del Sistemas Lineales 2

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

INSTITUTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Montevideo, segundo semestre del 2007

1. Introducción

El concepto de estabilidad es muy importante cuando se estudian sistemas físicos, gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en derivadas parciales, etc. La idea general de que los objetos matemáticos de interés, las soluciones las trayectorias, se comportan de una manera *aceptable*, permite a quien estudia el fenómeno tener ciertas garantías y seguridades, cierta *tranquilidad* en el momento de tener que tomar decisiones.

Por ejemplo, la idea de punto fijo estable según Liapunov en una ecuación diferencial ordinaria asegura que si uno parte de una condición inicial *suficientemente cercana* a él, entonces el sistema se mantendrá en las cercanías del punto fijo, es decir, cerca de un modo de funcionamiento conocido. Si además hay estabilidad asintótica, luego de transcurrido un cierto tiempo, el sistema se encontrará funcionando, en la práctica, en el punto de equilibrio. Esto permite al experimentador ciertas libertades, como admitir la existencia de cierta incertidumbre al momento de definir las condiciones iniciales, ya que pequeñas variaciones en las mismas no alterarán cualitativamente el comportamiento del sistema. En cambio, si estamos en las cercanías de un punto de equilibrio inestable, un pequeño error en la precisión de las condiciones iniciales determinará que, más tarde o más temprano, la trayectoria se alejará.

¿Qué pasa con los objetos que estudiamos nosotros, es decir, con los sistemas lineales causales invariantes en el tiempo, representables mediante una relación de convolución de una *señal de entrada* con una *respuesta al impulso* para obtener la *señal de salida* del sistema?

2. Definición

El sistema es el que se representa en la figura 1. En este caso, la idea de estabilidad que

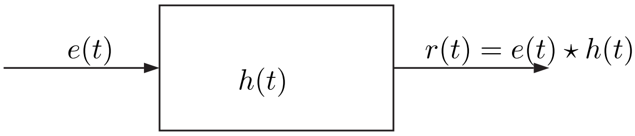

Figura 1: *Sistema lineal causal invariante en el tiempo.*

manejaremos nos permitirá asegurar que en presencia de un sistemas estable, en tanto nos aseguremos que la entrada se mantenga acotada, la respectiva salida no va a diverger. La definición que usaremos será la siguiente:

Definición 2.1 Estabilidad BIBO: *Diremos que un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo es BIBO-estable*[1] *si y sólo si a* **toda** *función de entrada acotada le corresponde una función de salida acotada.*

La definición anterior merece una serie de precisiones. En primer lugar, si bien la relación de convolución que define el sistema está bien definida para distribuciones de $\mathcal{D}'_+$, al referirnos a señales acotadas estamos limitando las entradas involucradas en la definición a funciones localmente integrables, para las cuales tiene sentido hablar de cotas. En segundo lugar y en el mismo sentido, una segunda limitación del conjunto de entradas involucradas en la definición surge de la necesidad de que la respectiva salida también sea una función.

Hay que destacar también que la salida acotada debe obtenerse para toda entrada acotada y que por lo tanto, la estabilidad BIBO no puede ser asegurada mirando la respuesta a una entrada acotada específica.

Ejercicio 2.1 *Utilizando la definición, verificar que la cascada de sistemas BIBO estables es BIBO estable. ¿Qué puede decir en el caso en que en la cascada participe algún sistema BIBO inestable?*

Veamos algunos ejemplos de sistemas e intentemos determinar su estabilidad BIBO utilizando la definición recién presentada:

Ejemplo 2.1 *Consideremos el sistema de respuesta impulsiva $h(t) = \delta(t)$. Este sistema es trivial, ya que simplemente repite la entrada a la salida (se sugiere al lector pensar en un sistema eléctrico que responda a esta descripción). En virtud de lo anterior, toda entrada acotada da efectivamente una salida acotada y el sistema es, entonces, BIBO estable.*

[1] Por la sigla en inglés: *Bounded Input - Bounded Output.*

Ejemplo 2.2 *Miremos ahora el caso $h(t) = \delta'(t)$, es decir, un sistema derivador. En este caso, no es difícil pensar en ejemplos de señales acotadas cuyas derivadas sean funciones no acotadas, como es el caso de*[2]

$$e(t) = Y(t). \sin\left(t^2\right) \Rightarrow r(t) = 2Y(t).t. \cos\left(t^2\right)$$

Ejemplo 2.3 *Sea el sistema integrador cuya respuesta al impulso es el escalón de Heaviside. La relación entrada-salida es*

$$r(t) = e(t) \star Y(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Es fácil ver que para una entrada constante (y por lo tanto acotada), la salida resulta ser una rampa y, por lo tanto, diverge. El sistema es entonces BIBO-inestable.

Ejemplo 2.4 *Finalmente, consideremos la siguiente respuesta al impulso*

$$h(t) = Y(t).e^{-t}$$

No es evidente que la respuesta a una entrada acotada sea acotada, aunque uno puede hacer el ejercicio de elegir una señal acotada determinada, plantear la expresión de la convolución para la salida e intentar acotar la misma.

3. Teorema de Estabilidad BIBO

Como puede apreciarse en los ejemplos anteriores, en algunos casos es trivial determinar la estabilidad BIBO de un sistema lineal. En otros casos, la inestabilidad surge a través de un contraejemplo concreto. Pero la definición de estabilidad BIBO, si bien da una idea clara de *lo que esperamos* de una sistema estable, no es, en general, simple de usar en la práctica. A continuación presentaremos una serie de resultados teóricos que nos brindarán herramientas simples de usar en la práctica para determinar si un sistema determinado es o no BIBO estable.

Comenzaremos primero con el caso en que la respuesta al impulso $h(t)$ es una función localmente integrable. El principal resultado, que será la base de los resultados posteriores, es el siguiente Teorema de Estabilidad.

Teorema 3.1 Teorema de Estabilidad: *Un sistema lineal, causal, invariante en el tiempo, cuya respuesta impulsiva es una función $h(t)$ localmente integrable es BIBO estable si y sólo si se cumple que*

$$\int_0^\infty |h(t)| dt = C < \infty$$

Demostración

($\Leftarrow$) Demostraremos en primer lugar el recíproco. O sea que partiendo de la convergencia de la integral impropia, demostraremos la estabilidad BIBO del sistema.
Consideremos una función de entrada $e(t)$ localmente integrable, acotada y arbitraria

$$\exists M > 0 \ \ tal\ que \ \ |e(t)| < M \ \ \forall t \geq 0$$

[2]Este ejemplo fue sugerido por Mauricio Achigar, para quien va el merecido agradecimiento.

Veamos que en esas condiciones podemos encontrar una cota para la salida. Para todo $t \geq 0$ se tiene que

$$|r(t)| = \left| \int_0^t e(t-\tau)h(\tau)d\tau \right| \leq \int_0^t |e(t-\tau)||h(\tau)|d\tau \leq M \int_0^t |h(\tau)|d\tau \leq M \int_0^\infty |h(\tau)|d\tau < MC$$

En la expresión integral de la convolución hemos usado el hecho de que la respuesta impulsiva es una función localmente integrable. Las últimas dos desigualdades son consecuencia directa de la positividad del integrando y de la causalidad del sistema.$\diamond$

($\Rightarrow$) La demostración del directo la haremos por el absurdo. En primer lugar, supondremos que, siendo el sistema BIBO estable, la integral impropia diverge. En esa situación, encontraremos, construyendo, una entrada acotada cuya salida diverja.

Sea $T_1 > 0$ tal que $\int_0^{T_1} |h(\zeta)| d\zeta > 1$. La existencia de T_1 está asegurada por la divergencia de la integral impropia. Definamos

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ sg\left[h(T_1 - t)\right]) & , \quad 0 \leq t \leq T_1 \\ 0 & , \quad t > T_1 \end{cases}$$

donde sg representa la función signo. Obsérvese que la función x_1 es de soporte acotado $[0, T_1]$. Sea y_1 la respuesta a la entrada x_1. Tenemos entonces que

$$y_1(T_1) = \int_0^{T_1} x_1(\tau)h(T_1 - \tau)\, d\tau = \int_0^{T_1} |h(T_1 - \tau)|\, d\tau = \int_0^{T_1} |h(\zeta)|\, d\zeta > 1$$

Lo importante de este paso es lo siguiente: dado un número positivo arbitrario (1 en este caso), es posible encontrar una función acotada, de soporte acotado (x_1 en este caso) cuya respectiva salida (y_1 en este caso) supere dicho número.

Sea

$$K_1 = \sup_{t \geq 0} |y_1(t)|$$

Este supremo es finito, tomado en **toda** la semirrecta positiva, pues, en caso contrario, la señal y_1, que es la respuesta a una entrada acotada, sería no acotada, lo que contradiría la estabilidad BIBO.

Elijamos ahora $T_2 > 0$ tal que

$$\int_0^{T_2} |h(\zeta)|\, d\zeta > 2 + K_1$$

Nuevamente T_2 existe por la divergencia de la integral impropia. Definamos ahora la siguiente función de soporte $[0, T_2]$,

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ sg\left[h(T_2 - t)\right]) & , \quad 0 \leq t \leq T_2 \\ 0 & , \quad t > T_2 \end{cases}$$

Si llamamos y_2 a la respuesta a x_2 tenemos, igual que antes, que

$$y_2\left(T_2\right)=\int_0^{T_2}\left|h\left(\zeta\right)\right|d\zeta>2+K_1$$

Construyamos ahora la nueva función de entrada $e_2(t)$ que consiste en poner la señal x_2 *a continuación*[3] de la señal x_1. Formalmente

$$e_2(t)=x_1(t-T_0)+x_2\left(t-T_0-T_1\right)=\sum_{j=1}^{2}x_j\left(t-\sum_{l=0}^{j-1}T_l\right)$$

(definiendo aquí $T_0=0$). La respuesta r_2 a esta entrada es

$$r_2(t)=y_1(t-T_0)+y_2\left(t-T_0-T_1\right)=\sum_{j=1}^{2}y_j\left(t-\sum_{l=0}^{j-1}T_l\right)$$

donde hemos usado la linealidad del sistema (a través del principio de superposición) y la invariancia temporal (la respuesta a la entrada trasladada es la respuesta original trasladada).

Analicemos el valor de $r_2(t)$ en el instante T_1+T_2:

$$r_2(T_1+T_2)=y_1(T_1+T_2)+y_2(T_2)$$

Como $|y_1(T_1+T_2)|\leq K_1$ y $y_2(T_2)>2+K_1$ resulta ser

$$r_2(T_1+T_2)>2$$

Repitiendo el proceso anterior, obtenemos una manera sistemática de encontrar una sucesión de tiempos positivos $\{T_i\}_{i\in\mathcal{N}}$ y una sucesión de funciones $\{x_i(t)\}_{i\in\mathcal{N}}$ con las siguientes características:

- las funciones x_i son acotadas (son funciones signo) y tienen soporte respectivo $[0,T_i]$.
- $y_i(T_i)>i+K_{i-1}$, siendo $K_{i-1}=\sup_{t\geq 0}|r_{i-1}(t)|$, con r_{i-1} la respuesta del sistema a la entrada
$$e_{i-1}(t)=\sum_{j=1}^{i-1}x_j\left(t-\sum_{l=0}^{j-1}T_l\right)$$

Definiendo ahora la función acotada

$$e(t)=\sum_{i=1}^{\infty}x_j\left(t-\sum_{l=0}^{j-1}T_l\right)$$

y $r(t)$ su respectiva salida,

$$r(t)=\sum_{i=1}^{\infty}r_j\left(t-\sum_{l=0}^{j-1}T_l\right)$$

[3] A este proceso se le llama *concatenación* de señales.

(donde hemos utilizado la linealidad y la invariancia temporal) tenemos que

$$r\left(\sum_{l=0}^{i} T_l\right) > i$$

por lo que obtenemos una salida divergente.

◇

¿Por qué no alcanza sólo con el primer paso? Porque éste prueba que dada una cota arbitrariamente grande, se puede encontrar una entrada acotada, **que dependa de dicha cota**, tal que el módulo de la respectiva salida supere la cota. Eso no significa que la salida diverja, pues podría alcanzar un módulo muy grande y después permanecer acotada. Es por eso que hay que recurrir al proceso de concatenación de señales acotadas y de soporte acotado que dan salidas *cada vez más grandes.*

4. Consecuencias del Teorema de Estabilidad

Hasta el momento, hemos logrado caracterizar la estabilidad BIBO de los sistemas lineales causales, invariantes en el tiempo, cuyas respuestas impulsivas son funciones localmente integrables. Una consecuencia inmediata de dicha caracterización es la siguiente

Corolario 4.1 *Sea un sistema lineal, causal e invariante en el tiempo, de respuesta al impulso $h(t)$, función localmente integrable, y sea $H(s)$ la correspondiente transferencia, es decir, la Transformada de Laplace de $h(t)$. Si el sistema es BIBO estable, entonces la abscisa de convergencia de $H(s)$ es no positiva.*

La demostración del resultado es inmediata, pues la Transformada de Laplace $H(s)$ converge absolutamente para parte real de s nula, debido a que $h(t)$ es módulo integrable.

Nuestro principal interés es estudiar transferencias reales racionales y propias, o sea transferencias del tipo

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

que son cocientes de polinomios de coeficientes reales, con grado del numerador menor o igual al del denominador. Si el grado del numerador es estrictamente menor, diremos que la transferencia es estrictamente propia. Las siguientes propiedades nos serán útiles:

- $\overline{H(s)} = H(\bar{s})$
- $$\lim_{s\to+\infty} \begin{cases} \in \mathcal{R} & \text{si } \mathrm{gr(N)} = \mathrm{gr(D)} \\ = 0 & \text{si } \mathrm{gr(N)} < \mathrm{gr(D)} \end{cases}$$
- Los polos (las raíces de $D(s)$) son reales o complejos conjugados.
- La abscisa de convergencia está dada por la parte real del polo ubicado más a la derecha.

- En la vertical que pasa por la abscisa de convergencia, hay puntos de no convergencia de la Transformada de Laplace.

Corolario 4.2 *Sea un sistema de transferencia $H(s)$ real racional y propia. El sistema es BIBO estable si y sólo si todos los polos del sistema tienen parte real negativa, lo que equivale a que la abscisa de convergencia sea negativa.*

Demostración:
($\Leftarrow$) Supongamos que los polos del sistema están a la izquierda en el plano complejo. Entonces, al ser la transferencia real racional y propia, puede escribirse así

$$H(s) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{K_{ij}}{(s+s_i)^j}$$

siendo $-s_i$ los polos complejos de multiplicidad respectiva v_i. Por lo tanto, la respuesta al impulso es

$$h(t) = Y(t). \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{K_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{-s_i t}$$

Entonces

$$|h(t)| \leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{|K_{ij}|}{(j-1)!} t^{j-1} e^{-Re(s_i)t}$$

Si la parte real de los polos es negativa, entonces el valor absoluto de $h(t)$ tiende a cero exponencialmente y se cumple la condición suficiente de estabilidad BIBO.

($\Rightarrow$) Si el sistema es BIBO estable, entonces la respuesta impulsiva, al ser una función, es absolutamente integrable y por lo tanto la transferencia no tiene singularidades ni en el eje imaginario ni a la derecha del mismo. Por lo tanto los polos se encuentran necesariamente en el semiplano izquierdo.

Llamaremos *Hurwitz* a una transferencia BIBO estable, es decir, con polos en el semiplano complejo izquierdo y abierto.

Ejercicio 4.1 *Verificar que si la transferencia no es propia, el sistema no es BIBO estable. (Sugerencia: escribir el sistema como varios derivadores en cascada a continuación de un sistema con transferencia propia.)*

El resultado visto para transferencias racionales es más general y puede extenderse a una clase más amplia de funciones de transferencia, aunque no lo veremos aquí.

5. Condición necesaria y suficiente de Estabilidad BIBO en distribuciones

Utilizando los resultados vistos hasta el momento, deduciremos una condición de estabilidad BIBO para el caso general en que la respuesta impulsiva es una distribución de $\mathcal{D}'_+$ (para abreviar, hablaremos de *distribuciones estables*).

Teorema 5.1 *Consideremos un sistema lineal, causal, invariante en el tiempo, cuya respuesta al impulso es la distribución $h(t)$ y tal que la transferencia $H(s)$ verifica además la siguiente acotación en cierto semiplano derecho*

$$|H(s)| \leq C.|s|^k$$

con C y k positivos. El si sistema es BIBO estable, todos los polos de $H(s)$ tienen parte real negativa. Si además, $H(s)$ es real racional propia, la condición es suficiente.

Demostraremos solamente la condición necesaria. Para ello consideremos el sistema BIBO estable auxiliar de respuesta al impulso $h_1(t) = Y(t).e^{-t}$. Su transferencia es

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

Sea $H_0(s)$ la respuesta al impulso del sistema resultante de la configuración mostrada en la figura 2. Entonces

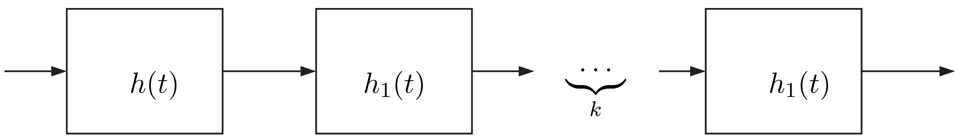

Figura 2: *Sistema resultante de la cascada del sistema original con $k+2$ sistemas auxiliares.*

$$H_0(s) = H(s).\frac{1}{(s+1)^{k+2}}$$

El módulo de $H_0(s)$ verifica, en algún semiplano derecho, la siguiente acotación

$$|H_0(s)| \leq \frac{C}{|s|^2}$$

por lo que, usando resultados de Transformada de Laplace, $h_0(t)$ es una función continua con soporte $[0, +\infty)$. Además, el sistema de transferencia $H_0(s)$ es estable, en virtud del ejercicio 2.1. Entonces, $H_0(s)$ tiene todos sus polos con parte real negativa. De la expresión de $H_0(s)$ resulta evidente que entonces también $H(s)$ tiene todos sus polos a la izquierda del eje imaginario.

Ejercicio 5.1 *Indicar cuáles de las siguientes transferencias corresponden a sistemas BIBO estables o inestables.*

1. $H(s) = \frac{1}{s}$
2. $H(s) = \frac{1}{s+1}$

3. $H(s) = \frac{1}{s-10}$
4. $H(s) = \frac{s+1}{s-1}$
5. $H(s) = \frac{1}{s^2+9}$
6. $H(s) = \frac{s^2}{s+1}$
7. $H(s) = \frac{1}{s+10}.e^{-s}$
8. $H(s) = \frac{s}{s-5}$