# *Pares de transformadas de Laplace*

| $f(t)$ | $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ | Semiplano de convergencia |
|---|---|---|
| impulso unitario $\delta(t)$ | $1$ | $\forall s \in \mathbb{C}$ |
| escalon unitario $Y(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > 0$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > 0$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > -a$ |
| $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > -a$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > 0$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > 0$ |
| $t^n$ , $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > 0$ |
| $t^n e^{-at}$ , $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > -a$ |
| $\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$ | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > \text{máx}\{-a, -b\}$ |
| $\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$ | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > \text{máx}\{-a, -b, 0\}$ |
| $e^{-at}\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > -a$ |
| $e^{-at}\cos(\omega t)$ | $\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > -a$ |
| $\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$ | $\frac{1}{s^2(s+a)}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > \text{máx}\{-a, 0\}$ |
| $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$ | $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > -\zeta\omega_n$ |
| $1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi)$<br>$\phi = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$ | $\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$ | $\mathbb{R}e\,\{s\} > \text{máx}\{-\zeta\omega_n, 0\}$ |

## *Propiedades de la transformada de Laplace*

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{L}\left[Af(t)\right]$ | $=$ | $AF(s)$ |
| $\mathcal{L}\left[f_1(t)+f_2(t)\right]$ | $=$ | $F_1(s)+F_2(s)$ |
| $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]$ | $=$ | $sF(s)-f(0)$ |
| $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]$ | $=$ | $\frac{F(s)}{s}$ |
| $\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right]$ | $=$ | $F(s+a)$ |
| $\mathcal{L}\left[Y(t-a)f(t-a)\right]$ | $=$ | $e^{-as}F(s)$ |
| $\mathcal{L}\left[tf(t)\right]$ | $=$ | $-\frac{dF(s)}{ds}$ |
| $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$ | $=$ | $aF(as)$ |
| Teorema del valor inicial:<br>$f(0^+)$ | $=$ | $\lim_{s\to+\infty} sF(s)$ |
| Teorema del valor final:<br>$f(t\to+\infty)$ | $=$ | $\lim_{s\to 0^+} sF(s)$ |
| Transformada de una función periódica de período $T$ :<br>$\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ | $=$ | $\frac{\mathcal{L}\left[f_T(t)\right]}{1-e^{-Ts}}$ , *siendo* $f_T$ *la restricción a un período de* $f(t)$ |
| Teorema de convolución:<br>$\mathcal{L}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]$ | $=$ | $F_1(s)F_2(s)$ |