

1.4. ENERGÍA Y COENERGIA MAGNETICA

Considérese una bobina de N espiras arrollada en un núcleo ferromagnético, tal como se muestra en la Figura 1.14a, que se conecta a una fuente de tensión variable $v(t)$; como consecuencia de ello se establecerá una corriente $i(t)$ en la bobina que producirá un flujo variable $\Phi(t)$ en el núcleo. De acuerdo con la ley de Faraday, el flujo anterior creará una f.e.m. inducida

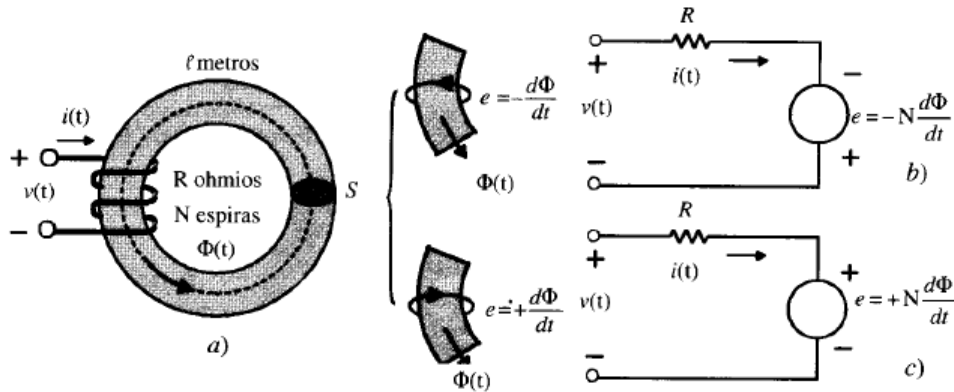


Figura 1.14. F.e.m. y f.c.e.m. inducida en una bobina con núcleo de hierro.

en cada una de las espiras del devanado, dando lugar a una f.e.m. total, que puede considerarse bien como una elevación de tensión en el sentido de la corriente (véase Fig. 1.14b) de valor:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.31)$$

o bien como una caída de tensión en el sentido de la corriente (véase Fig 1.14c), denominándose entonces **fuerza contraelectromotriz** (abreviadamente f.c.e.m.) cuya magnitud es:

$$e = +N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.32)$$

Las dos formas anteriores de expresar la misma ley (ley de Faraday-Lenz) suele ser motivo de confusión entre los estudiantes, no habiendo razón alguna a este dislate. Para ilustrar más eficazmente la aplicación de la ley de Faraday, en la parte central superior de la Figura 1.14 se ha aislado una espira del devanado para ver el sentido de la f.e.m. y corriente inducida. Se observa que la polaridad de la f.e.m. inducida es tal que produce una corriente (si la espira está cerrada) que da lugar a un flujo inducido en el **mismo sentido** del flujo inductor $\Phi(t)$, y es por ello que se hace necesario incluir el signo menos en la expresión de la f.e.m., para tener en cuenta la ley de Lenz, de oposición al cambio de flujo. En la Figura 1.14b se muestra el circuito eléctrico equivalente de la bobina, donde se observa que el sentido de elevación de la f.e.m. coincide con el sentido de la corriente (se ha considerado que la bobina tiene una resistencia R).

En el caso de la espira dibujada en la parte central inferior de la Figura 1.14, se observa que la polaridad de la f.e.m. inducida es contraria a la considerada en el caso anterior; en esta situación se produce una corriente en la espira, que da lugar a un flujo inducido que **se opone** al flujo principal $\Phi(t)$; es por ello por lo que no es necesario incluir el signo menos en la expresión de la f.e.m., puesto que con la polaridad asignada se obtiene un flujo inducido que es antagónico al principal. En la Figura 1.14c se ha representado el circuito equivalente de la

bobina correspondiente, en el que se observa que ahora el sentido de elevación de tensión de la f.e.m. es contrario a la corriente, y de ahí la justificación de la denominación antes indicada de *fuerza contraelectromotriz*.

Una vez hechas estas aclaraciones, vamos a calcular el balance energético que se produce en el circuito. Si aplicamos el segundo lema de Kirchhoff a la red de la Figura 1.14c resulta:

$$v = Ri + N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.33)$$

CAPÍTULO 1. CIRCUITOS MAGNÉTICOS Y CONVERSIÓN DE ENERGÍA 21

donde las expresiones v , i y Φ son funciones del tiempo, aunque no se hagan constar explícitamente en la ecuación anterior. Si en (1.33) se multiplican ambos miembros por $i dt$ resulta:

$$vi dt = R i^2 dt + Ni d\Phi \quad (1.34)$$

o expresado de otro modo:

$$dW_e = dW_R + dW_m \quad (1.35)$$

donde:

dW_e : diferencial de energía eléctrica que entra al circuito.

dW_R : diferencial de energía disipada en la resistencia R de la bobina por efecto Joule.

dW_m : diferencial de energía suministrada al campo magnético (diferencial de energía magnética).

La ecuación (1.35) representa el balance energético del circuito o simplemente la ley de conservación de la energía. El término dW_m se puede escribir:

$$dW_m = Ni d\Phi = \mathcal{F} d\Phi \quad (1.36)$$

donde \mathcal{F} representa la f.m.m. de la bobina. Si suponemos que en el instante inicial ($t = 0$) el flujo en el núcleo es nulo y la corriente es cero, y si se incrementan estos valores hasta unas magnitudes finales Φ e i , se tendrá una energía magnética total suministrada al núcleo magnético por la fuente:

$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathcal{F} d\Phi \quad (1.37)$$

La ecuación anterior indica que cuando se incrementa el campo magnético asociado con un núcleo, la energía fluye de la fuente al campo. Así pues, esta energía es almacenada por el campo magnético tanto tiempo como el flujo se mantenga en el mismo valor, en nuestro caso Φ . Si se considera que la curva de imanación del material ferromagnético del núcleo es la mostrada en la Figura 1.15, que es análoga a la indicada en la Figura 1.2, pero en la que ahora (Fig. 1.15) se ha representado en abscisas la f.m.m. en vez del campo H , y en ordenadas el flujo Φ en vez de la inducción B , entonces la energía magnética W_m de la expresión (1.37) vendrá expresada por el área comprendida entre la curva de imanación y el eje de flujos (área sombreada horizontalmente).

En la teoría de los circuitos magnéticos es interesante definir una magnitud denominada **coenergía** y que responde a la ecuación:

$$W'_m = \int_0^{\mathcal{F}} \Phi d\mathcal{F} \quad (1.38)$$

que es el área comprendida entre la curva de imanación y el eje de f.m.s. (área sombreada verticalmente en la Fig. 1.15). La coenergía no tiene un significado físico directo pero es de gran utilidad para el cálculo de fuerzas en los dispositivos electromagnéticos. Obsérvese que la suma de la energía más la coenergía magnética es el área del rectángulo $\mathcal{F} \Phi$ de la Figura 1.15.

22 MÁQUINAS ELÉCTRICAS

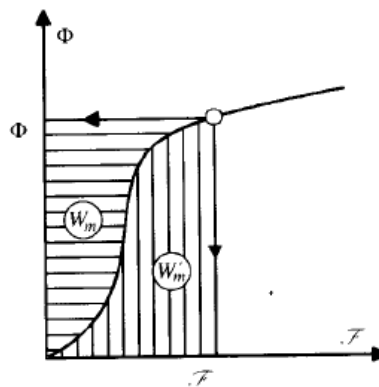


Figura 1.15. Energía y coenergía magnética.

Las expresiones (1.37) y (1.38) pueden también definirse en función de los campos magnéticos H y B . Si se considera el esquema de la Figura 1.14, en el que el núcleo tiene una sección uniforme S y ℓ es la longitud magnética media (longitud geométrica media), si se suponen uniformes los campos magnéticos, se podrá escribir:

$$\begin{aligned} \Phi &= B S & d\Phi &= S dB \\ \mathcal{F} &= H \ell & d\mathcal{F} &= \ell dH \end{aligned} \quad (1.39)$$

De este modo la expresión de la energía magnética almacenada (1.37) se convertirá en:

$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathcal{F} d\Phi = vol \cdot \int_0^B H dB \quad (1.40)$$

donde $vol = S \ell$ representa el volumen del núcleo ferromagnético. La energía almacenada por unidad de volumen, y que se denomina **densidad de energía magnética**, valdrá entonces:

$$w_m = \frac{W_m}{vol} = \int_0^B H dB \quad (1.41)$$

De un modo análogo, teniendo en cuenta (1.38) y (1.39) se obtiene una **densidad de coenergía magnética**:

$$w'_m = \int_0^H B dH \quad (1.42)$$

que tienen unas interpretaciones gráficas similares a las de la Figura 1.15, si se representan ahora el campo magnético H en abscisas y la inducción B en ordenadas. Cuando la curva de imanación del núcleo se considera lineal, los resultados precedentes dan lugar a expresiones muy simples. En primer lugar, es fácil darse cuenta en la Figura 1.15 que si la curva de imanación es una recta, entonces coinciden los valores numéricos de la energía y coenergía que corresponden a triángulos rectángulos cuyos catetos son Φ y \mathcal{F} , y de este modo (1.37) y (1.38) admiten las versiones siguientes:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} \mathcal{F} \Phi = \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} \quad (1.43)$$

CAPÍTULO 1. CIRCUITOS MAGNÉTICOS Y CONVERSIÓN DE ENERGÍA 23

donde se ha tenido en cuenta la ley de Hopkinson (1.26). De un modo análogo coinciden también las expresiones de las **densidades de energía y coenergía** (1.41) y (1.42):

$$w_m = w'_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (1.44)$$

La ecuación (1.43) puede expresarse también en función de la inductancia L de la bobina. Recuérdese que la inductancia en un medio lineal viene definida por el cociente:

$$L = N \frac{\Phi}{i} \quad (1.45)$$

y teniendo en cuenta la ley de Hopkinson:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \Phi \quad (1.46)$$

(1.45) se transforma en:

$$L = N^2 \frac{\Phi}{Ni} = N^2 \frac{\Phi}{\mathcal{F}} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \quad (1.47)$$

y por consiguiente (1.43) admite la siguiente versión:

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2} L \frac{\mathcal{F}^2}{N^2} = \frac{1}{2} L i^2 \quad (1.48)$$

que el lector recordará de un Curso de Teoría de Circuitos.

1.7. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN SISTEMAS MAGNÉTICOS CON MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN. ELECTROIMANES

En el epígrafe 1.4 se ha demostrado que un campo magnético almacena energía; por otro lado, un campo magnético también ejerce fuerzas mecánicas en las estructuras o partes de las estructuras asociadas con él. Estas dos propiedades hacen que se utilice el campo magnético como un enlace eficaz entre las partes eléctricas y mecánicas de muchos dispositivos electromecánicos y en particular de las máquinas eléctricas que son convertidores electromecánicos de la energía. En este epígrafe y en el siguiente se van a explicar los principios básicos de la conversión electromecánica de la energía, cuyo fundamento, como sistema físico que es, está basado en el principio general de la conservación de la energía. Nuestro objetivo va a ser aplicar esta ley a sistemas que utilizan el campo magnético como medio de enlace en la conversión. Considérese, para iniciar nuestro estudio, el sistema magnético dotado de movimiento de traslación indicado en la Figura 1.29, que tiene un devanado de excitación de N espiras arrolladas sobre una armadura fija.

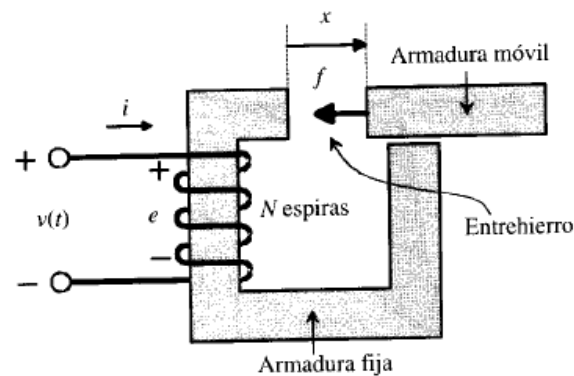


Figura 1.29. Sistema electromecánico de traslación.

Existe una armadura móvil que tiene un solo grado de libertad (su movimiento se restringe al plano horizontal). Cuando circula una corriente por la bobina de excitación, se establece un flujo magnético en el núcleo que provoca una fuerza de atracción sobre la armadura móvil, lo que reduce el entrehierro central, con la consiguiente disminución en la reluctancia del circuito magnético y la variación subsiguiente en la energía magnética almacenada. En la Figura 1.29 se han señalado los sentidos positivos de referencia, tanto en lo que concierne al terminal eléctrico, tensión y corriente, como al terminal mecánico, fuerza y desplazamiento. Si la armadura móvil se desliza hacia la izquierda desde una posición inicial $x_1 = x$ hasta una posición final $x_2 = x - dx$, el principio de conservación de la energía aplicado al sistema nos dará la ecuación:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} + dW_p \quad (1.77)$$

y en la expresión anterior se ha denominado:

- dW_e : cambio en la energía eléctrica absorbida de la red.
- dW_m : cambio en la energía magnética almacenada en el sistema.
- dW_{mec} : cambio en la energía mecánica debida al movimiento de la armadura móvil.
- dW_p : cambio en la energía perdida.

La ecuación anterior representa la ley de conservación de la energía aplicada a un sistema motor, es decir, a una transformación de energía eléctrica en mecánica. En el supuesto de considerar despreciables las pérdidas en el sistema, la ecuación (1.77) se transforma en:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} \quad (1.78)$$

Las pérdidas inherentes al sistema son: a) pérdidas por efecto Joule en la bobina, b) pérdidas en el hierro en el núcleo ferromagnético: histéresis y corrientes de Foucault, y c) pérdidas mecánicas de rozamiento de la armadura móvil. Vamos a analizar a continuación cada uno de los términos mostrados en la ecuación (1.78). Comenzamos con la energía magnética. En la Figura 1.30 se han representado las dos curvas de imanación del sistema magnético de la Figura 1.29, correspondientes a las dos posiciones de la armadura móvil: $x_1 = x$ y $x_2 = x - dx$.

Es evidente que existe una curva de imanación para cada una de las posiciones de la armadura móvil, o de otro modo, que la curva de imanación depende de la distancia x . Si se considera, por ejemplo, un flujo constante, definido por Φ_1 en la Figura 1.30, para la posición inicial $x_1 = x$ se necesita una f.m.m. \mathcal{F}_1 , mientras que para la posición final $x_2 = x - dx$ se

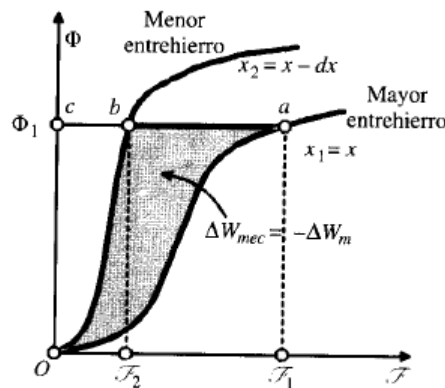


Figura 1.30. Energías en un sistema electromecánico no lineal. Funcionamiento a flujo constante.

necesita una f.m.m. \mathcal{F}_2 , que es menor que \mathcal{F}_1 , ya que corresponde a un menor entrehierro, es decir, a una reluctancia menor, lo que está de acuerdo con la ley de Hopkinson:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} ; \mathcal{F} = \Phi \mathcal{R} \quad (1.79)$$

Se observa en la ecuación anterior que si Φ es constante, a menor reluctancia corresponde menor f.m.m. Se puede razonar también de otro modo: si se considera una f.m.m. constante el flujo es tanto mayor cuanto menor es la reluctancia del circuito magnético (menor entrehierro). De ahí que en las curvas de imanación de la Figura 1.30, la curva más alta corresponda a un menor entrehierro (es decir, la armadura móvil se ha acercado a la armadura fija). De acuerdo con el epigrafe 1.4 (véase Fig. 1.15 y ecuación 1.37), si suponemos una situación inicial con un entrehierro $x_1 = x$ y un flujo en el núcleo Φ_1 (punto *a* de la Fig. 1.30), la energía magnética almacenada vendrá expresada por el área «oaco». Cuando se mueve la armadura móvil, la posición de ésta cambia desde x_1 a x_2 . La localización del nuevo punto de trabajo (nuevo estado) del sistema depende de cómo se ha efectuado el cambio de x_1 a x_2 . Existen dos formas básicas en la práctica de la ingeniería eléctrica que tienen interés:

a) El movimiento se realiza a flujo constante

Esta situación se logra ajustando la corriente durante el movimiento, o considerando que la traslación del núcleo es suficientemente rápida como para que no le dé tiempo a cambiar el flujo durante la transición. En este caso la energía eléctrica absorbida de la red será cero. Téngase en cuenta en la Figura 1.29 y ecuación (1.78) que la energía eléctrica absorbida durante la traslación vale:

$$dW_e = v i dt = N \frac{d\Phi}{dt} i dt = N i d\Phi \quad (1.80)$$

y al no existir variación de flujo durante el movimiento indicará que $dW_e = 0$, es decir, no hay aportación de energía eléctrica. Por consiguiente, la ecuación (1.78) se transformará en:

$$0 = dW_m + dW_{mec} \quad (1.81)$$

es decir:

$$dW_{mec} = -dW_m \quad (1.82)$$

lo que se expresa diciendo **que el trabajo mecánico se realiza a expensas de la reducción en la energía magnética almacenada.**

Si el flujo permanece constante en la transición de la armadura móvil, el nuevo estado de equilibrio corresponderá en la Figura 1.30 al punto *b*, para el cual la energía magnética almacenada en este estado final viene expresada por el área «obco». De este modo se ha producido una **reducción** de la energía magnética durante la traslación, que viene expresada en la Figura 1.30 por el área rayada «oabo» y que teniendo en cuenta (1.82) será igual al trabajo mecánico desarrollado. Si la fuerza de atracción se designa por *f*, el trabajo mecánico producido valdrá $f \cdot dx$, por lo que la expresión de la fuerza en función de la energía magnética almacenada, teniendo en cuenta (1.82), será:

$$f = - \left[\frac{\partial W_m}{\partial x} \right]_{\Phi=cte} \quad (1.83)$$

En la ecuación anterior la derivada parcial indica que al depender la energía magnética almacenada del espesor del entrehierro y de otras variables, la derivación debe hacerse respecto a x , considerando constante el flujo. De acuerdo con (1.83), la fuerza mecánica sobre la armadura móvil tiende a reducir la energía almacenada en el circuito magnético, y como quiera que ésta se reduce cuando disminuye el entrehierro, el sentido de la fuerza que se ejerce sobre la armadura móvil de la Figura 1.29 es siempre de *atracción*.

Si las curvas de imanación de la Figura 1.30 son líneas rectas (lo que ocurre en la práctica cuando los entrehierros son grandes), entonces, de acuerdo con (1.43), la expresión de la energía magnética almacenada será:

$$W_m = \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 \quad (1.84)$$

por lo que según (1.83) dará lugar a la fuerza:

$$f = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} \quad (1.85)$$

De acuerdo con esta expresión, la fuerza sobre la armadura móvil tendrá el sentido de reducir la reluctancia del circuito magnético. No habrá fuerza en otras direcciones en las que el movimiento no produzca cambio en la reluctancia magnética.

b) El movimiento se realiza con corriente constante

Esta situación se produce en la práctica si el movimiento de la armadura móvil es suficientemente lento. Si se parte de la posición inicial mostrada en la Figura 1.31 por el punto a , definido por la f.m.m. \mathcal{F}_1 y flujo Φ_1 , el nuevo estado de equilibrio (si se mantiene la corriente constante o, lo que es lo mismo, si es constante la f.m.m.) corresponderá al punto e , para el cual el flujo tiene un valor Φ_2 . Al existir un cambio de flujo en el sistema, existirá, de acuerdo con (1.80), un cambio en la energía eléctrica de entrada a la bobina durante la transición. Para poder determinar el sentido geométrico de la energía mecánica desarrollada en esta situación

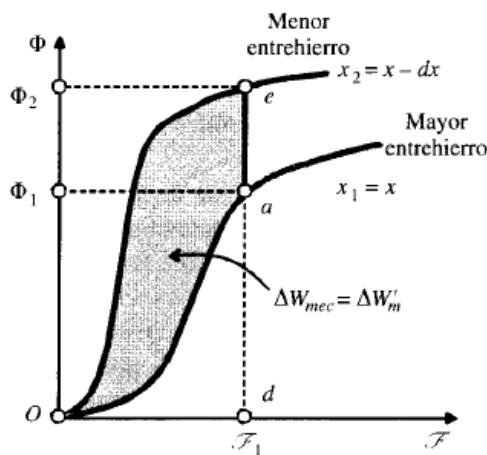


Figura 1.31. Energías en un sistema electromecánico no lineal. Funcionamiento a corriente constante.

es conveniente emplear el concepto de coenergía definido en el epígrafe 1.4. Téngase en cuenta que el principio de conservación de la energía expresado en (1.78) nos da:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} = N i d\Phi = \mathcal{F} d\Phi \quad (1.86)$$

donde el último término representa, según (1.80), el cambio en la energía eléctrica de entrada. Como quiera además que de acuerdo con la Figura 1.15 se cumple:

$$W_m + W'_m = \mathcal{F} \Phi \quad (1.87)$$

donde W'_m representa la coenergía magnética, al diferenciar la ecuación anterior resultará:

$$dW_m + dW'_m = \mathcal{F} d\Phi + \Phi d\mathcal{F} \quad (1.88)$$

y llevando el valor de dW_m de (1.88) a (1.86) se obtiene:

$$(\mathcal{F} d\Phi + \Phi d\mathcal{F} - dW'_m) + dW_{mec} = \mathcal{F} d\Phi \quad (1.89)$$

Simplificando la ecuación anterior y teniendo en cuenta que $d\mathcal{F} = 0$ en la transición (debido a que la f.m.m. se mantiene constante), resulta:

$$dW_{mec} = dW'_m \quad (1.90)$$

lo que indica que el trabajo mecánico se realiza ahora a expensas del aumento en la coenergía magnética almacenada. En el caso de la Figura 1.31, y teniendo en cuenta el significado geométrico de la coenergía mostrado en la Figura 1.15, la coenergía inicial corresponde al área «*odao*», mientras que la coenergía final corresponderá al área «*odeo*», por lo que el cambio en la coenergía (valor final menos el inicial) vendrá expresado por el área rayada «*oaeo*» y que según (1.90) define también el trabajo mecánico desarrollado en el movimiento. Como quiera que el trabajo anterior es igual a $f \cdot dx$, resultará una expresión para la fuerza:

$$f = + \left[\frac{\partial W'_m}{\partial x} \right]_{i=cte} \quad (1.91)$$

Si se considera el sistema lineal, la coenergía vendrá expresada según (1.43) por:

$$W'_m = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} \quad (1.92)$$

y al llevar (1.92) a (1.91) resulta:

$$f = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d\mathcal{L}}{dx} \quad (1.93)$$

donde $\mathcal{L} = 1/\mathcal{R}$ expresa la denominada **permeancia** del circuito magnético, análoga a la conductancia de los circuitos eléctricos. A veces es más interesante expresar la ecuación anterior en función de la inductancia del circuito. Si se tiene en cuenta entonces (1.48), resultará:

$$f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad (1.94)$$

ecuación que es más útil desde el punto de vista de la teoría de circuitos y que significa *que la fuerza tiende a incrementar el valor de la inductancia L*. Esta expresión se conoce en la bibliografía francesa como *fórmula de Picou*.

En la mayoría de las situaciones prácticas se suele considerar que se trabaja con sistemas lineales, por lo que las expresiones (1.85), (1.93) y (1.94) son equivalentes y por consiguiente redundantes. El sentido de la fuerza corresponde en cada caso a reducir la reluctancia (1.94) si la corriente es constante. El sentido es siempre de atracción. La aplicación más importante de la fuerza magnética en la ingeniería eléctrica está en los electroimanes. Para grandes potencias los electroimanes se emplean para levantar vigas de hierro, viruta, chatarra, etc.; en otros casos, al actuar sobre unas zapatas se pueden emplear como frenos eléctricos, embragues, electroimanes, etc. En potencias menores los electroimanes constituyen la base de los **relés y contactores**, en los que la corriente en una bobina hace que se produzca una atracción sobre una armadura móvil en oposición a la fuerza antagonista de un muelle. Los relés se utilizan en instalaciones de semáforos, en sistemas de control automático y se han empleado hasta fechas muy recientes en las centrales telefónicas *tipo rotary* (hoy día estas centrales funcionan mediante sistemas digitales controlados por ordenador). Cuando el relé permite activar una carga trifásica se denomina *contactor*, y este dispositivo es la base de los automatismos para el control de motores eléctricos y otros tipos de instalaciones. La gran ventaja de los relés y contactores estriba en que actuando sobre las pequeñas corrientes absorbidas por las bobinas de su circuito magnético se pueden controlar mediante el cierre o la apertura de su armadura móvil otros circuitos que consumen intensidades mayores (acción de **rele-vo**). En la Figura 1.32 se muestra el esquema básico de un relé.

Un aspecto importante a considerar en los electroimanes (relés, contactores, etc.) es el tipo de alimentación a la bobina, que puede hacerse con c.c. o c.a. Supóngase el circuito magnético de la Figura 1.32, en el que se desprecia la reluctancia del hierro frente a la del entrehierro. En el supuesto de que el movimiento de la armadura se realice a flujo constante, la fuerza magnética, de acuerdo con (1.85), tendrá la siguiente expresión:

$$f = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} \quad (1.95)$$

lo que significa que la fuerza tiende a reducir la reluctancia del circuito magnético. Si se denomina x el espesor del entrehierro, S la sección del mismo y μ_0 la permeabilidad del aire, la reluctancia del sistema magnético que se limita a la reluctancia del entrehierro valdrá:

$$\mathcal{R} = \frac{x}{\mu_0 S} \quad (1.96)$$

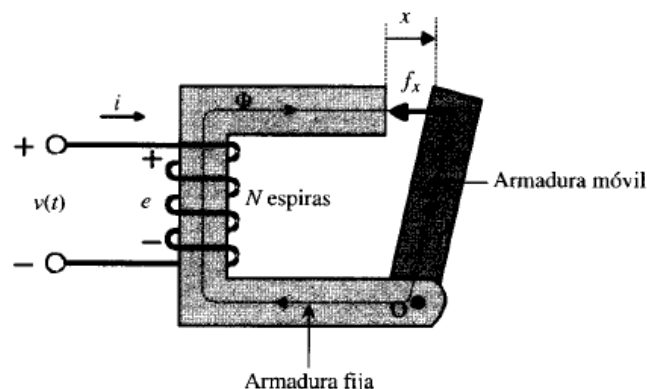


Figura 1.32. Principio de funcionamiento de un electroimán.

y al sustituir en (1.95) resulta una expresión para la fuerza:

$$f = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{1}{\mu_0 S} \quad (1.97)$$

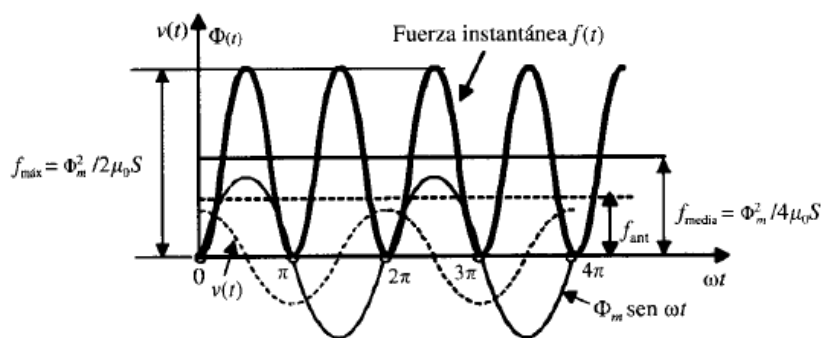
Como se ha indicado antes, el significado del signo - (menos) es que la fuerza tiende a reducir el entrehierro y se produce en cada uno de los posibles entrehierros que tenga el circuito. Es evidente en la expresión anterior que si la bobina se alimenta con c.c. el flujo tendrá un valor independiente del tiempo, lo que provocará una fuerza, según (1.97), que no dependerá del tiempo. Ahora bien, si la bobina se alimenta con c.a., el flujo será alterno y en consecuencia la fuerza dependerá del tiempo. Si se parte, por ejemplo, de un flujo de la forma:

$$\Phi = \Phi_m \text{ sen } \omega t \quad (1.98)$$

La fuerza de atracción se obtiene al sustituir (1.98) en (1.97), resultando ser:

$$f(t) = \frac{\Phi_m^2}{2\mu_0 S} \text{ sen}^2 \omega t = \frac{\Phi_m^2}{4\mu_0 S} (1 - \cos 2\omega t) \quad (1.99)$$

En la Figura 1.33 se ha representado la evolución con el tiempo del flujo y de la fuerza instantánea. Como indica la expresión (1.99), la fuerza electromagnética en un electroimán alimentado por c.a. tiene una frecuencia doble que la de alimentación pasando por un valor cero a otro $f_{\text{máx}}$. Como quiera que, en general, la armadura de los mecanismos electromagnéticos está constantemente sometida a la acción de la fuerza antagonista de un muelle f_{ant} , o al peso del sistema móvil (véase Fig. 1.34), en los intervalos de tiempo en los que $f(t) < f_{\text{ant}}$, la armadura se separa de los polos, mientras que cuando $f(t) > f_{\text{ant}}$, la armadura móvil queda atraída por la fija. Este hecho es un inconveniente y es totalmente inadmisibles, ya que provoca la vibración de la armadura del electroimán, deformando los polos y provocando ruidos intensos. El medio más eficaz para evitar la vibración de la armadura es colocar unas espiras cortocircuitadas sobre los polos del electroimán, denominadas **espiras de sombra**. En la Figura 1.34 puede observarse la colocación de una de estas espiras, en un circuito magnético de un solo entrehierro, y se observa que la fuerza antagonista está producida por el peso mg de la armadura móvil.



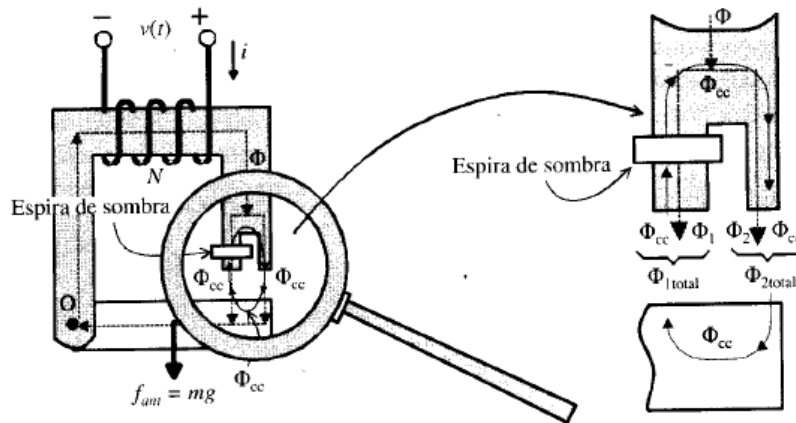


Figura 1.34. Electroimán con espira de sombra. Detalle de los flujos.

El flujo Φ creado por la bobina del electroimán se divide en dos partes Φ_1 y Φ_2 ; el flujo Φ_1 pasa por la espira cortocircuitada e induce una f.e.m. que produce una corriente en la misma, creando su propio flujo Φ_{cc} , de tal forma que el flujo total que atraviesa la parte del polo abrazada por la espira ($\Phi_1 - \Phi_{cc}$) y el flujo de la parte del polo no abrazada ($\Phi_2 + \Phi_{cc}$) están desfasadas un ángulo α . Si estos flujos vienen expresados por:

$$\begin{aligned} \Phi_{1total} &= \Phi_1 - \Phi_{cc} = \Phi_{m1} \cos(\omega t + \alpha) \\ \Phi_{2total} &= \Phi_2 + \Phi_{cc} = \Phi_{m2} \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.100)$$

la fuerza resultante en el entrehierro, de acuerdo con (1.99), será de la forma:

$$f_{total} = f_1 + f_2 = K_1 \Phi_{m1}^2 \cos^2(\omega t + \alpha) + K_2 \Phi_{m2}^2 \cos^2 \omega t \quad (1.101)$$

cuya curva de variación con el tiempo se indica en la Figura 1.35. Esta fuerza varía entre f_{\min} y f_{\max} sin pasar por cero. Si $f_{\min} > f_{am}$ no existirán vibraciones en la armadura. Normalmente la superficie abrazada por la espira suele variar entre el 75 y el 80 por 100 de la sección total del polo, de esta forma se minimizan las pérdidas por efecto Joule en la espira y se obtiene una fuerza óptima en el entrehierro.

Anécdota: Si se quitan las espiras de sombra de un contactor, se notará una fuerte vibración en el mismo, y si éste se utiliza para la puesta en marcha de un motor, se pueden provocar

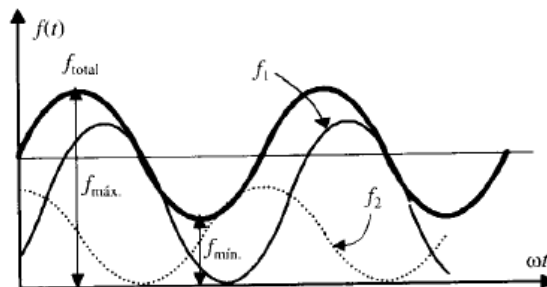


Figura 1.35. Fuerzas componentes en un electroimán con espira de sombra.

fuertes corrientes de cierre y apertura en el circuito principal, que normalmente hacen actuar los cortocircuitos fusibles de protección. Ésta era una broma que hacían los antiguos maestros industriales a los peritos o ingenieros técnicos que se incorporaban al taller eléctrico de la empresa y que éstos transmitían luego a los nuevos ingenieros. Era desconcertante repasar continuamente el circuito del automatismo del motor y comprobar que era correcto y sin embargo el conjunto funcionaba mal. ¡La ausencia de las espiras de sombra eran las culpables de tal desaguisado! ¡Qué mala *sombra* tenía la cosa!