

CUADERNO DE EJERCICIOS

(resultados)

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONTROL

Departamento de Control y Electrónica Industrial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Facultad de Ingeniería

Edición 2011

Contenido:

- Hoja N°0. Fundamentos**
- Hoja N°1. Diagramas de Bloques y Clasificación de Sistemas**
- Hoja N°2. Modelado: Variables de Estado y Sensibilidad**
- Hoja N°3. Modelado: Variables de Estado y Condiciones Iniciales**
- Hoja N°4. Modelado: Linealización**
- Hoja N°5. Matriz de Transición de Estados**
- Hoja N°6. Respuesta Temporal**
- Hoja N°7. Estabilidad: Lugar de las Raíces**
- Hoja N°8. Estabilidad: Respuesta en Frecuencia**
- Hoja N°9. Compensadores**
- Hoja N°10. Tiempo Discreto: Transformada Z**
- Hoja N°11. Tiempo Discreto: Muestreo y Estabilidad**
- Hoja N°12. Problemas de Examen**

Hoja de ejercicios N°0 : Fundamentos

1) Cálculo matricial: Multiplicación e inversión, valores y vectores propios.

a)

$$\lambda.I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{bmatrix} \quad \det(\lambda.I - A) = \lambda^2 \cdot (\lambda + 6) + 6 + 11 \cdot \lambda = (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda + 3)$$

Los valores propios (v.p.) son: $\{-1; -2; -3\}$

Calculo los vectores propios, como: $A \cdot (VP_i) = \lambda_i \cdot (VP_i)$

Para $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Análogamente, para $\lambda = -2$ y $\lambda = -3$ se obtienen $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$, respectivamente.

b) **P** se arma con los V.P. "colgados" y **D** es la matriz diagonal con los v.p.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

c) Se debe ejecutar: $[P, D] = \text{eig}(A)$

2) Transformada de Laplace

a)

f(t)	$\delta(t)$	7,8	$16 \cdot e^{-8t}$	18.t	$120 \cdot \text{sen}(25.t)$	$3,2 \cdot \cos(1000.t)$	$8.t^2$
F(s)	1	$\frac{7,8}{s}$	$\frac{16}{s+8}$	$\frac{18}{s^2}$	$\frac{3000}{s^2 + 625}$	$\frac{3,2 \cdot s}{s^2 + 10^6}$	$\frac{16}{s^3}$

b)

f(t)	$7,8 + 16 \cdot e^{-8.t}$	$8,2.t \cdot e^{-2,5.t}$	$9 \cdot e^{-3.t} \cdot \text{sen}(100.t)$	$2 \cdot \text{sen}(t - 6)$
F(s)	$\frac{7,8}{s} + \frac{16}{s+8}$	$\frac{8,2}{(s+2,5)^2}$	$\frac{900}{(s+3)^2 + 10^4}$	$\frac{2 \cdot e^{-6s}}{s^2 + 1}$
f(t)	$5 \cdot e^{-7.t} \cdot \cos(50.t)$	$45 \cdot e^{-5 \cdot (t-6)}$	$4,8 \cdot e^{-5.t} \cdot \cos(400.t - 36^\circ)$	
F(s)	$\frac{5 \cdot (s+7)}{(s+7)^2 + 50^2}$	$\frac{45 \cdot e^{-6.s}}{s+5}$	$\frac{2,4 \angle -36^\circ}{s+5 - j \cdot 400} + \frac{2,4 \angle +36^\circ}{s+5 + j \cdot 400}$	

c)

f(t)	$12 \cdot \int x(t) \cdot dt + 17 \cdot x(t)$	$8 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \cdot \frac{dx}{dt} \quad \frac{dx}{dt}(0) = 8$ y $x(0) = -4$
F(s)	$\left(\frac{12}{s} + 17\right) \cdot X(s)$	$(8 \cdot s^2 + 5 \cdot s) \cdot X(s) + 32 \cdot s - 44$

d)

F(s)	345	$\frac{345}{s}$	$\frac{6,7}{s^2}$	$\frac{45}{s+72}$	$\frac{25.\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{28.s}{s^2+\omega^2}$
f(t)	$345.\delta(t)$	345	$6,7.t$	$45.e^{-72.t}$	$25.\text{sen}(\omega.t)$	$28.\text{cos}(\omega.t)$

e)

F(s)	$\frac{650}{(s+8)^2}$	$\frac{250.\omega}{(s+4)^2+\omega^2}$	$\frac{16.(s+5)}{(s+5)^2+\omega^2}$	$\frac{64\angle 48^\circ}{s+8-j.16} + \frac{64\angle -48^\circ}{s+8+j.16}$
f(t)	$650.t.e^{-8.t}$	$250.e^{-4.t}.\text{sen}(\omega.t)$	$16.e^{-5.t}.\text{cos}(\omega.t)$	$128.e^{-8.t}.\text{cos}(16.t+48^\circ)$

f)

F(s)	$\frac{82}{s.(5.s+1)}$	$\frac{4.(s+5).(s+7)}{s.(s+3).(s+6)}$	$\frac{2.(s+5)}{(s+1)^2}$	$\frac{s+2}{s^2+2.s+4}$
f(t)	$82.(1-e^{-0,2.t})$	$7,78-3,56.e^{-3.t}-0,22.e^{-6.t}$	$2.e^{-t}+8.t.e^{-t}$	$e^{-t}.\text{cos}(\sqrt{3}.t) + \frac{1}{\sqrt{3}}.e^{-t}.\text{sen}(\sqrt{3}.t)$

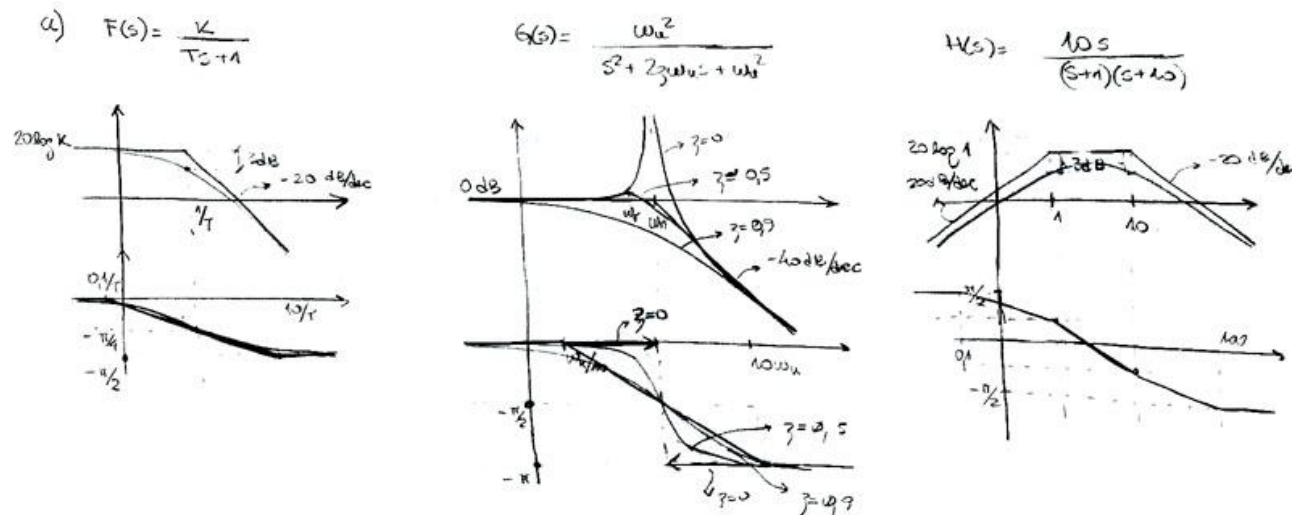
3) Ecuaciones diferenciales

Solución

a) $x_1(t) = 0,4.(1 - e^{-5.t}); \quad x_2(t) = 0,4.(2 - e^{-2,5.t} - e^{-5.t})$

b) $V_o(t) = 8,095.[1 + 1,046.e^{-0,6.t}.\text{sen}(1,96.t - 1,868)]$

4) Respuesta en frecuencia: Diagramas de Bode

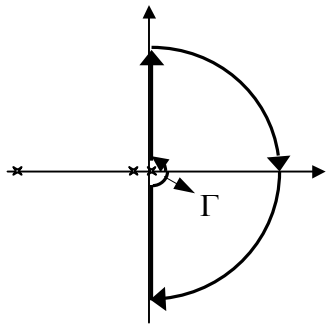


b)

u(t)	$10.\text{sen}(t)$	$5.\text{sen}(10.t + \pi/2)$	$2.\text{sen}(t) + 10.\text{sen}(10.t + \pi)$
y(t)_{aprox}	$10.\text{sen}(t - \pi/4)$	$0,5.\text{sen}(10.t)$	$2.\text{sen}(t - \pi/4) + \text{sen}(10.t + \pi/2)$
y(t)_{real}	$10/\sqrt{2}.\text{sen}(t - \pi/4)$	$5/\sqrt{101}.\text{sen}(10.t + \text{Arctg}(0,1))$	$\sqrt{2}.\text{sen}(t - 45^\circ) + 0,995.\text{sen}(10.t + 95,7^\circ)$

5) Respuesta en frecuencia: Diagramas de Nyquist

a) Diagrama de Nyquist

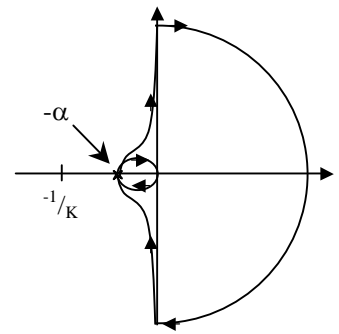
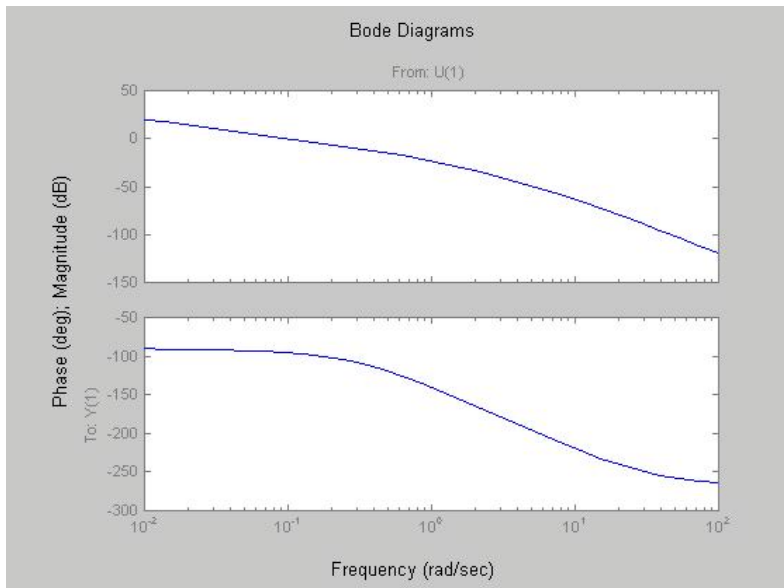
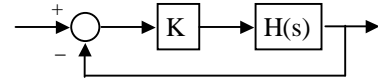


$$H(s) = \frac{1}{s.(s+1).(s+10)}$$

Rodeo el polo en $s = 0$ dejándolo fuera: $\mathbf{P} = 0$

$$\Gamma = r.e^{j.\theta}, \quad r \rightarrow \infty \text{ y } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$H(\Gamma) = \frac{1}{r.e^{j.\theta} (1+r.e^{j.\theta})(10+r.e^{j.\theta})} \quad \text{que con } r \rightarrow \infty, H(\Gamma) \cong \frac{e^{-j.\theta}}{10.r}$$



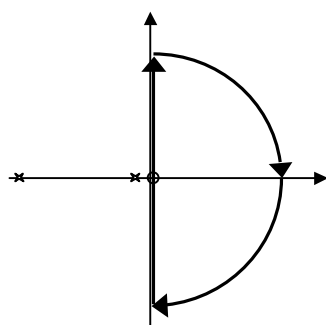
$$\alpha = |H(j\omega)|_{\omega=\omega_0}$$

ω_0 es la media geométrica entre 1 y 10 $\Rightarrow \omega_0 = 3,16$ y $\alpha = \frac{1}{110}$

$$\vec{N} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{K} < 0 \Rightarrow K > 0 \\ \text{y} \\ -\frac{1}{K} < -\alpha \Rightarrow K < \frac{1}{\alpha} = 110 \end{cases}$$

b) Cond. de estabilidad: $\boxed{0 < K < 110}$

A) Diagrama de Nyquist



$$H(s) = \frac{10.s}{(s+1).(s+10)}$$

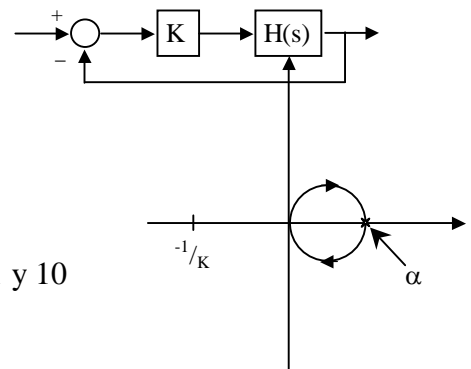
El cero en $s = 0$ no molesta

$\mathbf{P} = 0$

$$\alpha = |H(j\omega)|_{\omega=\omega_0}$$

ω_0 es la media geométrica entre 1 y 10

$$\Rightarrow \omega_0 = 3,16 \text{ y } \alpha = 0,909\dots$$



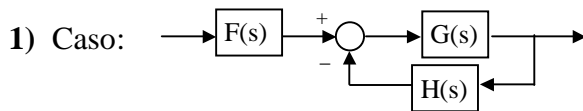
$$\bar{N} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{K} < 0 \Rightarrow K > 0 \\ o \\ 0 > -\frac{1}{K} > \alpha \Rightarrow 0 > K > -\frac{1}{\alpha} = -1,1 \end{cases}$$

B) Cond. de estabilidad: $K > -1,1$

6) Modelado

a)	$C.\ddot{V}_o + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).\dot{V}_o + \frac{1}{L}.V_o = \frac{1}{R_1}.\dot{V}_i$
b)	$C.\dot{V}_i + \frac{1}{R_1}.V_i = -\frac{1}{R_2}.V_o$
c)	$\left(\frac{J}{R^2} + M_1 + M_2\right).\ddot{x} = -(B + K_d).\dot{x} - K_s.x$
d)	$\begin{cases} \left(\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2}\right).\ddot{x}_1 = K_{s2}.(x_2 - x_1) - K_{s1}.x_1 - K_d.\dot{x}_1 - \left(\frac{B_1}{R_1^2} + \frac{B_2}{R_2^2}\right).\dot{x}_1 \\ M.\ddot{x}_2 = -K_{s2}.(x_2 - x_1) \end{cases}$
e)	$\begin{cases} S.\dot{H} = A + U - K.\sqrt{H} \\ S.H.\dot{X} = (1 - X).A - X.U \end{cases}$

Hoja de ejercicios N°1 : Diagrama de Bloques y Clasificación de Sistemas



$$FT(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G.F}{1+G.H}$$

6) $a \geq 0$ y $t_c \geq b$

7) a) V sólo si el sistema es algebraico

b) V

c) V sólo si el sistema tiene salida nula para entrada nula

d) V

e) V

10) a) Algebraico

b) Parámetros concentrados: 2 variables de estado

c) Parámetros concentrados: 1 variable de estado

d) Algebraico

Hoja de ejercicios N°2 : Modelado - Variables de Estado y Sensibilidad

1) c) $G_a = \frac{\left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right)}{1 + \frac{R_f}{R_i} + A}$

2) a) $G = \frac{1}{1 + \frac{R_b + r_\pi}{R_e \cdot (\beta + 1)}}$

4) a)
$$\begin{cases} \frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} \cdot (V_a - R_a \cdot i_a - K_a \cdot \omega) \\ \frac{di_b}{dt} = \frac{1}{L_b} \cdot (V_b - R_b \cdot i_b - K_b \cdot \omega) \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \cdot (K_a \cdot i_a + K_b \cdot i_b - b \cdot \omega - C) \end{cases}$$

5)
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \cdot = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/C_1 & 1/C_1 \\ 0 & 0 & -1/C_1 & 0 \\ 1/L_1 & 1/L_1 & 0 & 0 \\ -1/L_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L_2 \end{bmatrix} [u] \quad [y] = [-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + [1][u]$$

6) b)
$$H(s) = \frac{K + b \cdot s}{[m_2 \cdot s^2 + b \cdot s + K + K_2][m_1 \cdot s^2 + b \cdot s + K + K_1] - (K + b \cdot s)^2}$$

Hoja de ejercicios N°3 : Modelado - Variables de Estado y Condiciones iniciales

2) Primer principio a cada recipiente: Al recipiente 1 queda $(V_1 \cdot c_1 \cdot T_1)^\bullet = q_1 \cdot c_1 \cdot (T_{1i} - T_1) + k \cdot (T_2 - T_1)$

Hoja de ejercicios N°4 : Modelado - Linealización

1) a) $m \cdot \ddot{X} = -b \cdot \dot{X} - k \cdot (X - d) + F_m$ $F_m = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right|_{I=cte}$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dl = \frac{S}{2} \cdot \left[\int_0^{L-X} B \cdot H \cdot dl + \int_0^g B \cdot H \cdot dl \right] \quad (\mu_{Fe} = \infty)$$

$$H = \frac{B}{\mu}; \quad B = \frac{\Phi}{S}; \quad \Phi = \frac{N \cdot I}{\mathfrak{R}}; \quad \mathfrak{R} = \frac{\text{long}}{\mu \cdot \text{sección}} = \frac{L-X}{\mu_{aire} \cdot S} + \frac{g}{\mu_{aire} \cdot S}$$

$$\varepsilon = \frac{N^2 \cdot I^2 \cdot \mu_{aire} \cdot S}{2 \cdot (g + L - X)} \Rightarrow \boxed{m \cdot \ddot{X} = -b \cdot \dot{X} - k \cdot (X - d) + \frac{N^2 \cdot I^2 \cdot \mu_{aire} \cdot S}{2 \cdot (g + L - X)^2}}$$

b) $I_0^2 = \frac{2 \cdot (g + L - X_0)^2 \cdot k \cdot (X_0 - d)}{N^2 \cdot \mu_{aire} \cdot S}$ $m \cdot \ddot{x} = -b \cdot \dot{x} + \left(\frac{2 \cdot (X_0 - d)}{g + L - X_0} - 1 \right) \cdot K \cdot x + \frac{N^2 \cdot \mu_{aire} \cdot S \cdot I_0}{(g + L - X_0)^2} \cdot i$

2) Modelo linealizado

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 \cdot \omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot r_0 \cdot \omega_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 \cdot \frac{\omega_0^2}{r_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m \cdot r_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m \cdot r_0} \end{bmatrix} \cdot U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot U$$

3) $\frac{\varphi(s)}{V(s)} = \frac{a \cdot k_2 \cdot r}{[J \cdot s^2 + B \cdot s + (k_2 + k_3) \cdot r^2][b \cdot s + k_1 + k_2] - k_2^2 \cdot r^2}$ Se considera el brazo mecánico de la

$$\varphi(t) = \varphi_f(t) + \varphi_p(t) = 1,2 - \left(0,3 + \frac{\pi}{2} \cdot 0,061 \right) \cdot e^{-3,01 \cdot t} + 0,16 \cdot (\cos(1,323 \cdot t) - 5,2 \cdot \sin(1,323 \cdot t)) \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

d) [num,den] = ss2tf(A,B,C,D,in) en este caso in = 1

Hoja de ejercicios N°5 : Matriz de transición de estados

2) a)

$$e^{A.t} = \begin{bmatrix} e^{2.t} + 0,243.(e^{5,56.t} - e^{1,44.t}) & e^{2.t} - 0,864.e^{1,44.t} - 0,136.e^{5,56.t} & 0,485.(e^{1,44.t} - e^{5,56.t}) \\ 0,243.(e^{1,44.t} - e^{5,56.t}) & 0,864.e^{1,44.t} + 0,136.e^{5,56.t} & 0,485.(e^{5,56.t} - e^{1,44.t}) \\ 0,5.e^{2.t} - 0,19.e^{1,44.t} - 0,31.e^{5,56.t} & 0,5.e^{2.t} - 0,674.e^{1,44.t} + 0,174.e^{5,56.t} & 0,38.e^{1,44.t} + 0,62.e^{5,56.t} \end{bmatrix}$$

5) Balance de masa a cada especie:

$$(V.C_r)^{\bullet} = V.\dot{C}_r = Q.C_{ri} - Q.C_r - V.K.C_r$$

$$(V.C_p)^{\bullet} = V.\dot{C}_p = 0 - Q.C_p + V.K.C_r$$

Hoja de ejercicios N°6 : Respuesta temporal

2) a) $H(s) = \frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{A}{A-4}$

b) $H(s) = \frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{K}{2.R.C.s^3 + 4.s^2 + 2.R.C.K.s + K} = \frac{1}{(s+1).(s^2 + s + 1)}$

c) Error entrada salida $\rightarrow \infty$; la señal e(t) $\rightarrow \frac{-16}{K}$

3) a) $n = 955 \text{ rpm}$

b) $\frac{n(s)}{V_R(s)} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{A\phi.\beta.(\beta + 2)}{R_1.R.C.(J.s^2 + b.s) + A\phi.\beta.(\beta + 2).K_f}$

c) $\tau = 0,366$; $t_s = 1,2 \text{ s}$

5) b) $\frac{\theta_m}{V_A}(s) = \frac{A_2.K_m}{T_m.s^2 + s + A_2.K_m.K_p} \left(\frac{n}{n_C} \right)^{OL} = \frac{n}{\theta_m} \cdot \frac{\theta_m}{V_A} \cdot \frac{V_A}{n_C} = \frac{A_1.A_2.f.K_m.K_V \cdot \frac{N_m}{N_V}}{S.s.(T_m.s^2 + s + A_2.K_m.K_p)}$

e) $3,3 \leq A_I \leq 4,49$

Hoja de ejercicios N°7 : Estabilidad - Lugar de las Raíces

1) $A_{OL} = K \frac{s^2 + 35s + 300}{s(s^2 + 16)}$

c) $K > 8,13 = -1/\alpha$

e) `bode(num,den)`

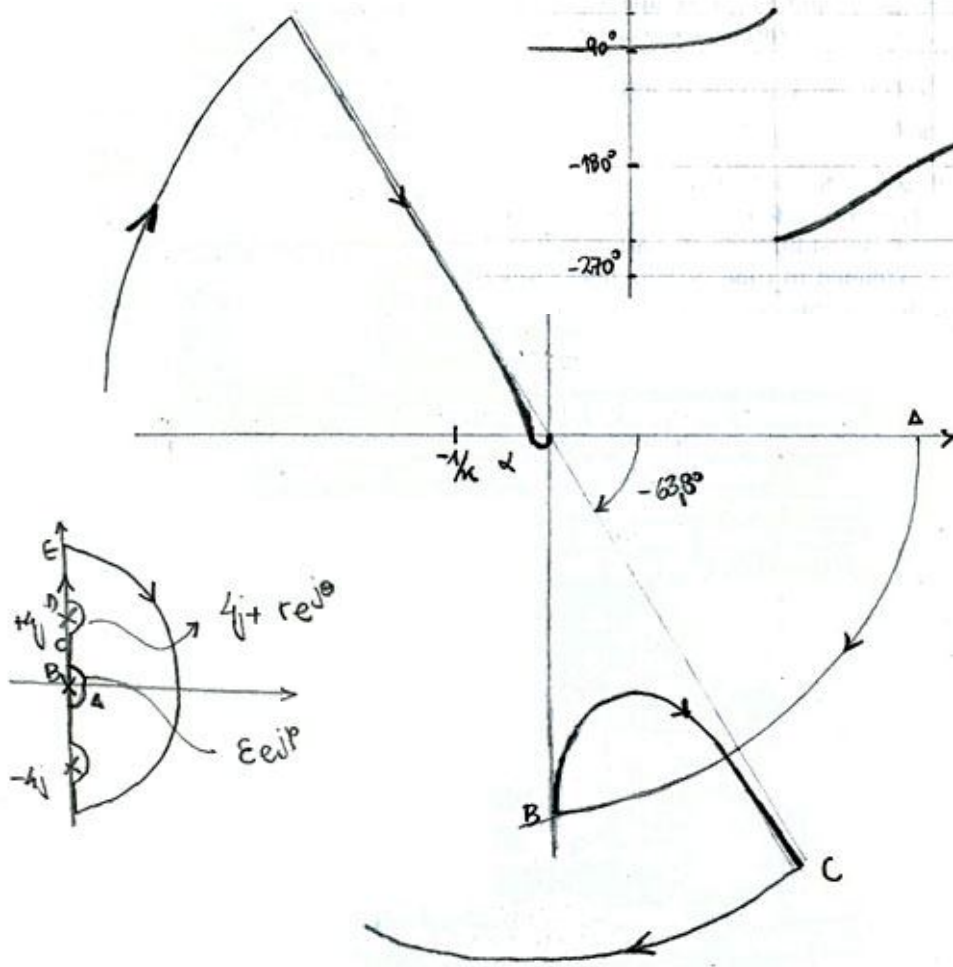
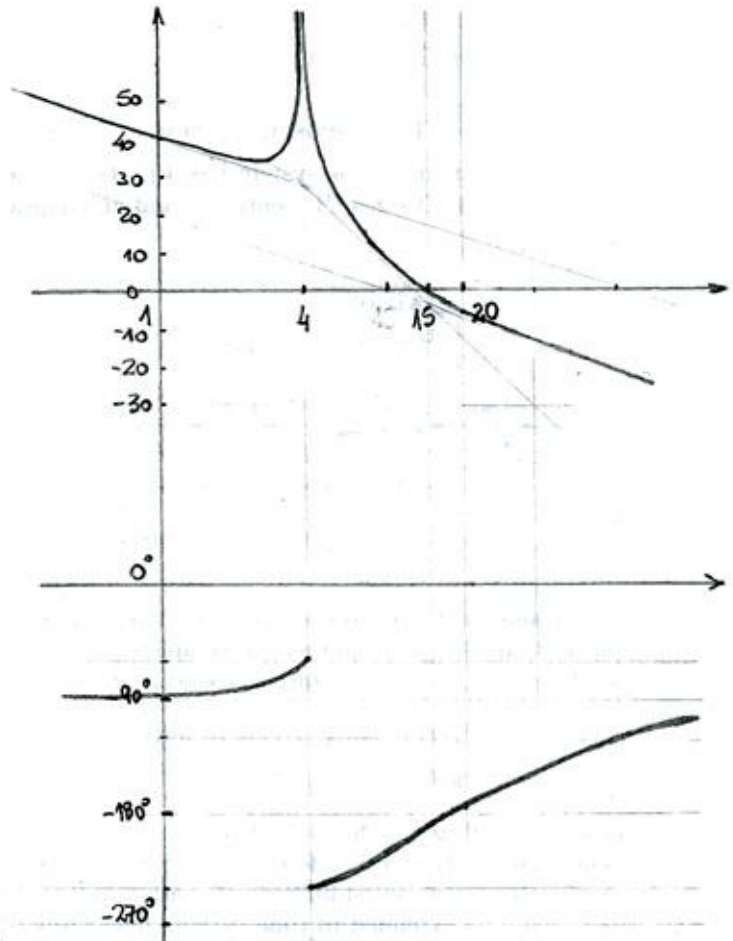
f) `[mag,fase,w] = bode(num,den)`

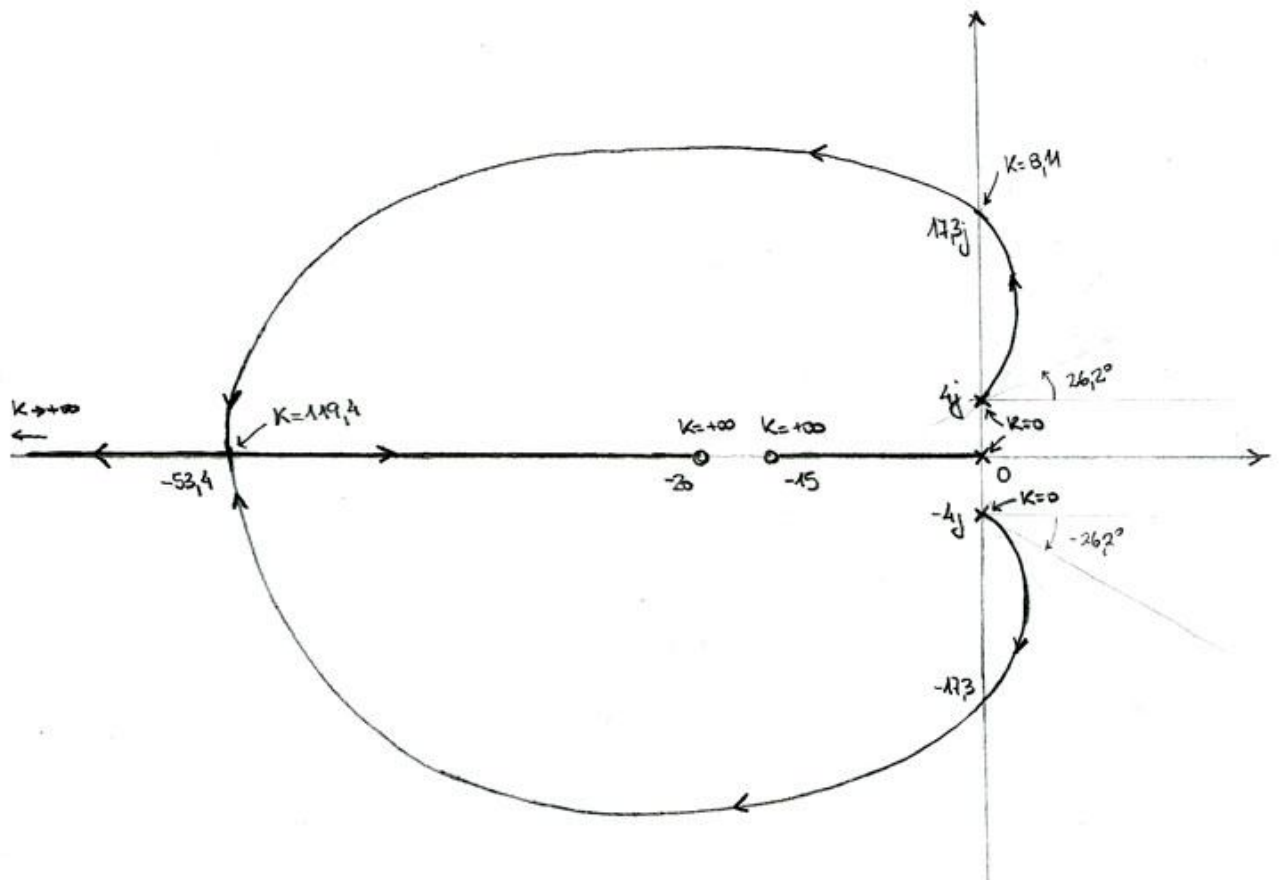
`i = max(size(w))`

`w(i+1) = wr - ε, w(i+2) = wr + ε, w`
`= sort(w)`

`bode(num,den,w)`

g) `nyquist(num,den)`, **hold on**,
 mapear las curvas con `r→0` con **plot**,
zoom para sacar α .





- 6) a) $\frac{V_O}{V_I} = -\frac{1 + R.C.s}{(1 + 2.s^2).(1 + R.C.s) + (2,5 + s).R.C.s^2}$ Hallar polos y ceros de lazo cerrado.
- b) $F(s) = 1 + 2.s^2 + K.s.(1 + 2,5.s + 3.s^2) = 0 \quad K = R.C$
- c) Dibujar el lugar de las raíces.

Hoja de ejercicios N°8 : Estabilidad - Respuesta en frecuencia

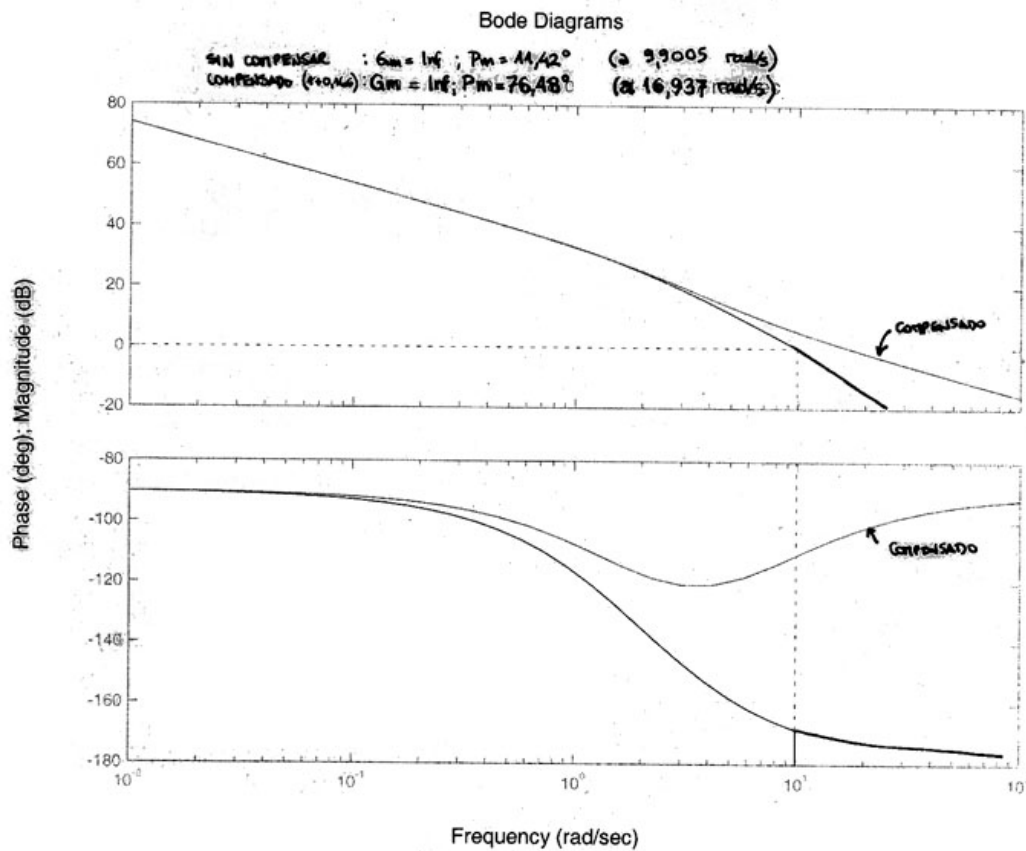
5) a) $\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{\alpha.(1 + R_2.C.s)}{J.R_1.C.s^3 + \beta.R_1.C.s^2 + \alpha.R_2.C.s + \alpha} \quad \alpha = \frac{\Lambda\phi}{R} \cdot \frac{A.V_{CC}}{2.\pi} \quad \beta = b + \frac{(\Lambda\phi)^2}{R}$

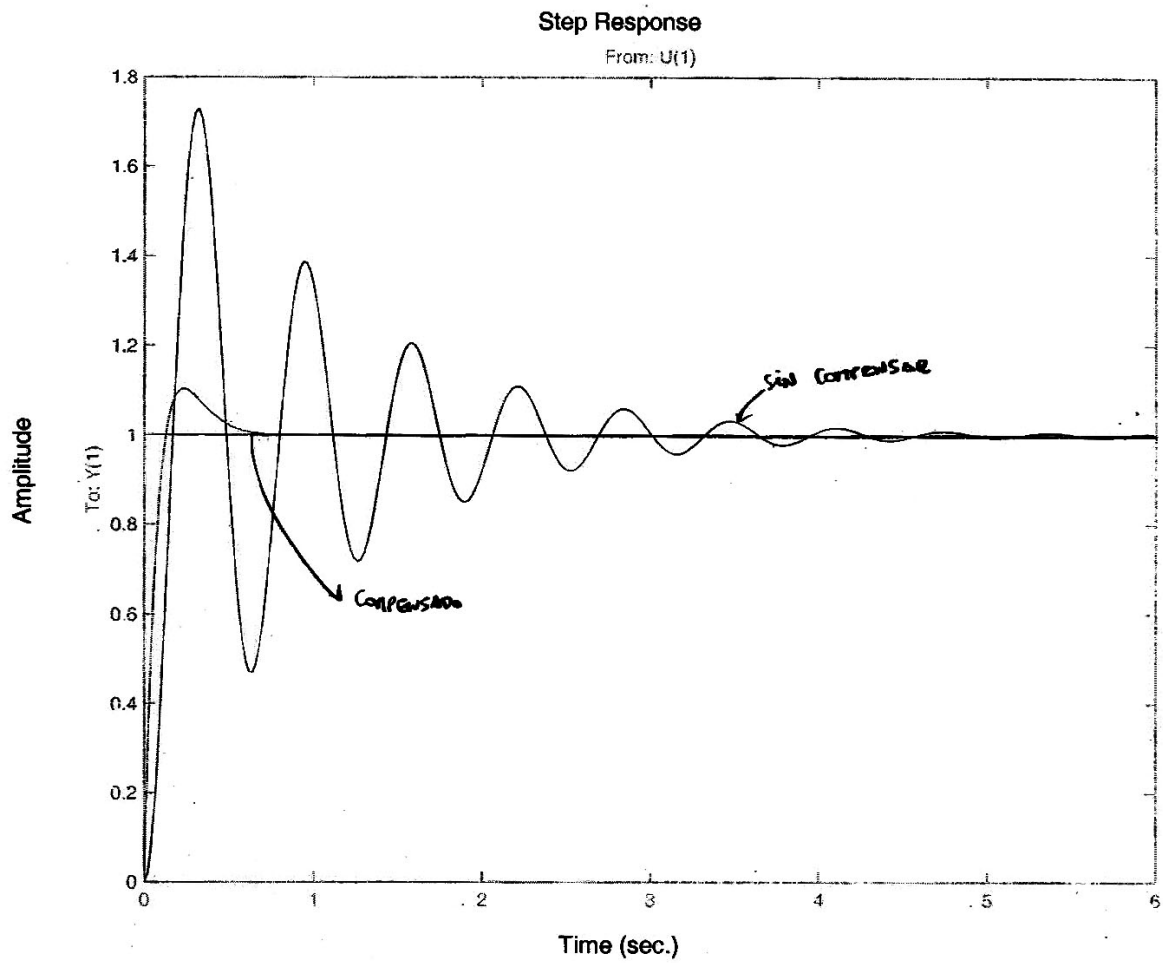
Hoja de ejercicios N°9 : Compensadores

4) a) Estable $\Leftrightarrow 0 < K_2 < 2\zeta\omega_n + K_1\omega_n^2$

5) a) $K = 0,16$

Sin compensar	Compensado
b) $\omega_C = 9,9 \text{ rad/s}$ $MF = 11,4^\circ$	$\omega_C = 16,94 \text{ rad/s}$ $MF = 76,5^\circ$
c) $\omega_{BW} = 15,4 \text{ rad/s}$	$\omega_{BW} = 20,3 \text{ rad/s}$
d) $y(t) = 1 + 1,005.e^{-t} \cdot \sin(9,95.t - 1,67)$	$y(t) = 1 + 1,892.e^{-t} \cdot \sin(4,36.t - 0,557)$





Hoja de ejercicios N°10 : Tiempo Discreto - Transformada Z

4) $x_k = (-2 + 3 \cdot 2^k)u_k + [(2 \cdot x_{-2} - x_{-1}) + (x_{-1} - x_{-2}) \cdot 2^{k+2}]u_{k+2}$

Hoja de ejercicios N°11 : Tiempo Discreto - Muestreo y Estabilidad

1)

	a)	b)	c)	d)
G(s)	1	1/s	1/(s + a)	(s + 3)/(s ² + 2.s + 2)
A(z)	1	$\frac{T}{z-1}$	$\frac{1}{a} \left(1 - \frac{z-1}{z-e^{-aT}} \right)$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{(z-1)(3.z + e^{-T}).(\sin T - 3.\cos T)}{z^2 - 2.z.e^{-T}.\cos T + e^{-2T}}$

3) b) Polos: $z = e^{-a.T}$

4) a) $\Phi = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$ $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix}$ b) $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{z-1}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z-1}{z-e^{-2T}}$

7) a) 1 afuera
b) 1 afuera
c) 2 sobre

8) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\Gamma = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot (e^{2T} - 1) + 0,243 \cdot \left(\frac{e^{5,56T} - 1}{5,56} - \frac{e^{1,44T} - 1}{1,44} \right) \\ 0,243 \cdot \left(\frac{e^{1,44T} - 1}{1,44} - \frac{e^{5,56T} - 1}{5,56} \right) \\ 0,25 \cdot (e^{2T} - 1) - 0,189 \cdot \left(\frac{e^{1,44T} - 1}{1,44} \right) - 0,311 \cdot \left(\frac{e^{5,56T} - 1}{5,56} \right) \end{bmatrix}$

$\Phi = \begin{bmatrix} e^{2T} + 0,243 \cdot (e^{5,56T} - e^{1,44T}) & e^{2T} - 0,864 \cdot e^{1,44T} - 0,136 \cdot e^{5,56T} & 0,485 \cdot (e^{1,44T} - e^{5,56T}) \\ 0,243 \cdot (e^{1,44T} - e^{5,56T}) & 0,864 \cdot e^{1,44T} + 0,136 \cdot e^{5,56T} & 0,485 \cdot (e^{5,56T} - e^{1,44T}) \\ 0,5 \cdot e^{2T} - 0,19 \cdot e^{1,44T} - 0,31 \cdot e^{5,56T} & 0,5 \cdot e^{2T} - 0,674 \cdot e^{1,44T} + 0,174 \cdot e^{5,56T} & 0,38 \cdot e^{1,44T} + 0,62 \cdot e^{5,56T} \end{bmatrix}$

11) a) $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\bar{G}(z)}{1 + \bar{G}\bar{F}(z)} = \frac{4.T \cdot (z - e^{-2T})}{4.z^2 + (2.T - 5 - 3.e^{-2T}).z + 1 + 3.e^{-2T} - 2.T.e^{-2T}}$

b) $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\bar{G}(z)}{1 + \bar{G}(z) \cdot \bar{F}(z)} = \frac{2.T \cdot (z - e^{-2T})}{2.z^2 - 2 \cdot (1 + e^{-2T}).z + 2.e^{-2T} + T - T.e^{-2T}}$

12) a) Si

b) K_1 y K_2 positivos

c) $K_1 > 0$ y además $\begin{cases} -2.e^{-0,5.K_1.T} \cdot \cos(\omega.T) < e^{-K_1.T} + 1 \\ 2.e^{-0,5.K_1.T} \cdot \cos(\omega.T) < e^{-K_1.T} + 1 \end{cases}$