# Lógica de predicados. Deducción Natural <sub>Lógica</sub>

### Contenidos I

Introducción

Para todo

Existe

• Definición de DER

Consecuencia sintáctica

### Deducción natural

- Definimos inductivamente el conjunto  $DER_P$  de las derivaciones de la lógica de predicados.
- Caso base: derivación trivial (idem PROP)
- Para los conectivos: las mismas reglas de introducción y eliminación que en PROP
- Para los cuantificadores (∀ y ∃) se agregan reglas de introducción y eliminación.

## Contenidos I

Introducción

• Para todo

Existe

Definición de DER

Consecuencia sintáctica

### ¿Cómo probar un ∀? Hipótesis.

 $\delta_1, \dots \delta_n$ , x es una variable fresca

### Tesis.

Para todo x vale  $\alpha$ 

#### Demostración.

Probamos  $\alpha$  usando  $\delta_1, \ldots \delta_n$ Como x no aparece en  $\delta_1, \ldots \delta_n$  la prueba es independiente de x. Luego, hemos probado  $\alpha$  para

cualquier x, usando  $\delta_1, \ldots \delta_n$ 

#### Introducción ∀

$$\delta_1, \dots, \delta_n 
\vdots 
\frac{\dot{\alpha}}{(\forall x)\alpha} I_{\forall}(*)$$

(\*) x no ocurre libre en las hipótesis  $\delta_1, \ldots, \delta_n$ .

## ¿Cómo utilizar un ∀?

### Hipótesis.

 $\delta_1, \dots \delta_n$ , y t es el nombre de un individuo.

### Tesis.

El individuo nombrado por t cumple la propiedad  $\alpha$ 

### Demostración.

Probamos  $(\forall x)\alpha$  usando  $\delta_1, \dots \delta_n$  Luego, vale  $\alpha[t/x]$ .

### Eliminación

$$\begin{array}{c} \delta_1, \dots, \delta_n \\ \vdots \\ \frac{(\forall x)\alpha}{\alpha \lceil t/x \rceil} E_{\forall}(*) \end{array}$$

(\*) t debe estar libre para x en  $\alpha$ .

### Contenidos I

Introducción

Para todo

Existe

• Definición de DER

Consecuencia sintáctica

# ¿Cómo probar un 3?

### Hipótesis.

$$\delta_1, \ldots \delta_n$$
.

#### Tesis.

Algún individuo cumple la propiedad  $\alpha$ .

#### Demostración.

Pruebo que  $\alpha$  vale para cierto t, usando  $\delta_1, \dots \delta_n$ .

Luego, existe un elemento para el cual vale  $\alpha$ .

#### Introducción ∃

$$\begin{array}{ccc} \delta_1, \dots, \delta_n & \vdots & \\ \frac{\alpha[t/x]}{(\exists x)\alpha} I_{\exists}(*) & \end{array}$$

(\*) t debe estar libre para x en  $\alpha$ .

## ¿Cómo utilizar un 3?

### Hipótesis.

 $\delta_1, \dots \delta_n$ , algún individuo cumple la propiedad  $\alpha$ , y  $x \notin FV(\{\delta_1, \dots \delta_n\})$ .

#### Tesis.

Se cumple  $\beta$ .

#### Demostración.

Asumimos que x cumple  $\alpha$ . Probamos  $\beta$  usando

$$\delta_1, \dots \delta_n$$
 y  $\alpha$ 

Luego, hemos probado  $\beta$ , usando  $\delta_1, \dots \delta_n$  y  $(\exists x)\alpha$ 

### Eliminación 3

$$\frac{\delta_1, \dots, \delta_n, [\alpha]^{(1)}}{\vdots} \\
\frac{(\exists x)\alpha \qquad \beta}{\beta} E_{\exists}^{(1)}(*)$$

(\*) x no ocurre libre ni en  $\beta$  ni en las hipótesis  $\delta_1, \ldots, \delta_n$ .

### Contenidos I

Introducción

Para todo

Existe

Definición de DER

Consecuencia sintáctica

# Definición: DER<sub>P</sub>

El conjunto  $DER_P$  de las derivaciones de la lógica de predicados se define inductivamente como sigue:

### Análogo a DER

1)

# Definición:DER $_P$ — $\forall$

 $I \forall$ 

Si 
$$Pointsize Pointsize P$$

### $E \forall$

Si  $(\forall x)\varphi \in DER_P$  y t está libre para x en  $\varphi$ , entonces

 $(\forall x)\varphi$ 

$$\frac{D}{(\forall x)\varphi} \in DER_P$$

$$\frac{(\forall x)\varphi}{\varphi[t/x]}$$

 $\in DER_P$ 

# Definición: DER $_P$ 3

 $I\exists$ 

Si 
$$\varphi[t/x] \in DER_P$$
 y  $t$  está libre para  $x$  en  $\varphi$ , entonces

$$\begin{array}{c}
D \\
\underline{\varphi[t/x]} \\ (\exists x)\varphi
\end{array} \in \mathrm{DER}_{P}$$

# Definición: $DER_P \exists$

 $E\exists$ 

$$\operatorname{Si} \stackrel{D}{(\exists x)} \varphi \in \operatorname{DER}_P \operatorname{y} \stackrel{\varphi}{\psi'} \in \operatorname{DER}_P \operatorname{y} x \notin \operatorname{FV}(H(D') - \{\varphi\})$$

y  $x \notin FV(\psi)$ , entonces

### Contenidos I

Introducción

Para todo

Existe

Definición de DER

Consecuencia sintáctica

### Consecuencia sintáctica

#### Definición

Sea  $\Gamma \subseteq \text{FORM}$  y  $\varphi \in \text{FORM}$ . Decimos que  $\varphi$  es consecuencia sintáctica de  $\Gamma$  o que  $\varphi$  se deriva de  $\Gamma$  ssi existe  $D \in \text{DER}_P$  tal que:  $C(D) = \varphi$  y  $H(D) \subseteq \Gamma$ .

#### Notación

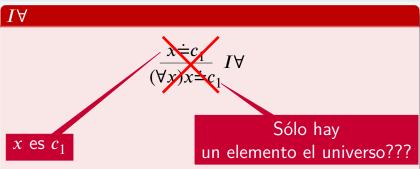
 $\Gamma \vdash \varphi$  se lee  $\varphi$  se deriva de  $\Gamma$ .

 $\vdash \varphi$  se lee  $\varphi$  es teorema.

### Restricciones sobre las variables

### ¿Se necesitan las restricciones en∀ y ∃ ?

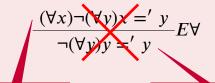
Sin las restricciones, las reglas permiten construir derivaciones que corresponden a razonamientos incorrectos.



La introducción es incorrecta porque x está libre en la hipótesis.

# ¿Se necesitan las restricciones en $\forall$ y $\exists$ ?

#### $E \forall$

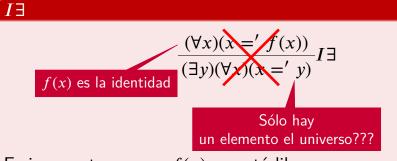


Hay mas de un elemento.

Hay un elemento que no es igual a sí mismo???

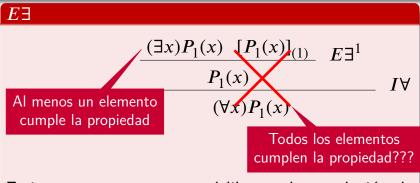
Es incorrecta porque y no está libre para x en  $\neg(\forall y)x='y$ .

# ¿Se necesitan las restricciones en ∀ y ∃ ?



Es incorrecta porque f(x) no está libre para y en  $(\forall x)(x = 'y)$ .

# ¿Se necesitan las restricciones en ∀ y ∃ ?



Es incorrecta porque x está libre en la conclusión de la eliminación de  $(\exists x)P_1(x)$ 

## Restricciones y alcance

- Hay que recordar que las hipótesis canceladas, en realidad, son hipótesis normales de sub-derivaciones.
- Son hipótesis normales (abiertas, sin cancelar), desde donde aparecen hasta la regla que las cancela y por lo tanto, valen las restricciones en todas las reglas que se utilicen entre esos lugares.

#### Controlar la zona de cancelación

$$\frac{(\exists x)P_1(x) \quad \frac{[P_1(x)]_{(1)}}{(\forall x)P_1(x)} I^{\forall x}}{(\forall x)P_1(x)} E \exists^1$$

Es incorrecto porque la hipótesis  $P_1(x)$  está abierta desde donde aparece hasta la regla que la cancela.

### Ejemplos

$$\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\alpha \to (\forall x_2)(\forall x_1)\alpha$$

$$\vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\alpha \to (\exists x_2)(\exists x_1)\alpha$$

$$\vdash (\forall x_1)(\alpha \land \beta) \to (\forall x_1)\alpha \land (\forall x_1)\beta$$

$$\vdash (\exists x_1)(\alpha \lor \beta) \to (\exists x_1)\alpha \lor (\exists x_1)\beta$$

$$\vdash (\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\exists x)\beta)$$

$$\vdash (\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta), \text{ si } x \notin FV(\alpha)$$

$$\vdash (\forall x)(\alpha \to \beta) \to ((\exists x)\alpha \to \beta), \text{ si } x \notin FV(\beta)$$

## Propiedades de los cuantificadores

### Lema: propiedades de derivabilidad del ∀

- Si  $\Gamma \vdash \varphi$  y  $x \notin FV(\Gamma)$  entonces  $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$ .
- Si  $\Gamma \vdash (\forall x) \varphi$  y t libre para x en  $\varphi$ , entonces  $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$ .

### Lema: propiedades de derivabilidad del 3

- Si t es libre para x en  $\varphi$  entonces  $\varphi[t/x] \vdash (\exists x)\varphi$
- Si  $x \notin FV(\psi) \cup FV(\Gamma)$  entonces, si  $\Gamma, \varphi \vdash \psi$  luego  $\Gamma, (\exists x) \varphi \vdash \psi$

## Igualdad e identidad

Hasta ahora usamos hemos interpretado el símbolo igualdad. Otra alternativa es caracterizarlo como *identidad* a través de axiomas.

### Axiomas de Identidad

### Esquemas de Axiomas

## Propiedades de los Axiomas

- I4 exige además que la relación sea una congruencia con respecto a todas las relaciones definibles en el lenguaje.
- Si interpretamos a  $\doteq$  como la identidad, se demuestra que toda estructura  $\mathcal M$  cumple

$$\mathcal{M} \models \{I1, I2, I3, I4\}$$

# Identidad y Deducción Natural (1/2)

Los axiomas pueden incorporarse como reglas de derivación.

$$\overline{t \doteq t} RI1$$

$$\frac{t \doteq s}{s \doteq t} RI2$$

$$\frac{t \doteq s \quad s \doteq r}{t \doteq r} RI3$$

# Identidad y Deducción Natural (2/2)

Los axiomas pueden incorporarse como reglas de derivación.

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \dots t_n \doteq s_n}{t[t_1, \dots, t_n/z_1, \dots, z_n] \doteq t[s_1, \dots, s_n/z_1, \dots, z_n]} RI4$$

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad t_n \doteq s_n \quad \varphi[t_1, \dots, t_n/z_1, \dots, z_n]}{\varphi[s_1, \dots, s_n/z_1, \dots, z_n]} RI4^*$$

(\*) Para cada  $i \in [1..n]$  se tiene que  $t_i$  y  $s_i$  están libres para  $z_i$  en  $\varphi$ .

## Otras Versiones de las Reglas

Sea  $\mathscr{L}$  un lenguaje de tipo  $\langle r_1, \dots r_n; a_1, \dots a_m; k \rangle$ . Entonces, los axiomas RI4 pueden derivarse de

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \dots t_{a_j} \doteq s_{a_j}}{f_j(t_1, \dots, t_{a_j}) \doteq f_j(s_1, \dots, s_{a_j})} RI4'$$

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad t_{r_i} \doteq s_{r_i} \quad P(t_1, \dots, t_{r_i})}{P_i(s_1, \dots, s_{r_i})} \; RI4'^*$$

usando inducción en TERM y FORM.

### $\Gamma \models \varphi$

Para poder probar consistencia, debemos extender la definición de F a todo FORM.

Intuitivamente,  $\Gamma \models \varphi$  vale sólo si, para todas las estructuras  $\mathscr{M}$  y todas las posibles asignaciones  $\tilde{a}$  (en  $|\mathscr{M}|$ ) de valores a las variables libres de  $\Gamma$  y de  $\varphi$ , se verifica que: si las hipótesis en  $\Gamma(\tilde{a})$  son ciertas, entonces también es cierta  $\varphi(\tilde{a})$ 

# Definición. $\varphi(\tilde{a}), \Gamma(\tilde{a})$

```
Dados \Gamma \subseteq FORM, \varphi \in FORM
   tales que FV(\Gamma) \cup FV(\varphi) \subseteq \{y_1, y_2, \dots\},\
   y una estructura \mathcal{M}
   donde \tilde{a} una secuencia (a_1, a_2, \dots) de elementos de
       |\mathcal{M}| (eventualmente repetidos)
definimos \Gamma(\tilde{a}) y \varphi(\tilde{a}) como la sustitución simultánea
\Gamma[\bar{a}_1, \bar{a}_2, .../y_1, y_2 ...] y \varphi[\bar{a}_1, \bar{a}_2, .../y_1, y_2 ...] en todas
las fórmulas de \Gamma y en \varphi de los y_i por los \bar{a}_i.
```

# Def 2.8.1. $\mathcal{M} \models \Gamma(\tilde{a}) \vee \Gamma \models \varphi$

- i)  $\mathcal{M} \models \Gamma(\tilde{a})$  si para todo  $\psi \in \Gamma(\tilde{a})$  se cumple  $\mathcal{M} \models \psi$
- ii)  $\Gamma \models \varphi$  si para toda estructura  $\mathcal{M}$  y para toda secuencia  $\tilde{a}$  en  $|\mathcal{M}|$ , si  $\mathcal{M} \models \Gamma(\tilde{a})$  entonces  $\mathcal{M} \models \varphi(\tilde{a})$

### Observación

Esta definición generaliza la definición 2.2.4. Que se aplica sólo si  $\Gamma\subseteq {\rm SENT}$  y  $\varphi\in {\rm SENT}$ .

# Lema 2.8.2. Corrección de DER<sub>P</sub>

Si  $\Gamma \vdash \varphi$  entonces  $\Gamma \models \varphi$ 

### **Aplicaciones**

Demostrar que:

- $\not\vdash (\forall x)(\exists y)\varphi \to (\exists y)(\forall x)\varphi$
- $(\forall x)P(x, x), (\forall y)(\forall x)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)) \nvdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \land P(y, z) \rightarrow P(x, z))$