Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso Anual 2013**

Prueba 1
Jueves 9 de mayo de 2013

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y Nombre

Ejercicio 1 (5 puntos)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1. Hallar el rango por columnas de A discutiendo según a.
2. ¿ El vector $\hat{X} = (1, -1, 1)$ es solución del sistema $AX = \overline{0}$?.
3. Para $a = 0$, hallar la inversa de A (verificar).
4. Usar la parte anterior para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

1. Para calcular el rango de la matriz A vamos a hallar una forma escalerizada de A:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{matrix} \underset{F_3+F_1}{\overset{F_2-F_1}{\longrightarrow}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 2 & a+1 \end{matrix}$$

Por lo tanto si $a = 1$ ya obtenemos una forma escalerizada de A con dos escalones. Por lo tanto el rango$(A) = 2$.

Si $a \neq 1$ entonces diviendo la segunda fila por $a - 1$ se obtiene:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a+1 \end{matrix}$$

En este caso, si $a + 1 = 0$ ($a = -1$) las filas dos y tres son proporcionales y por lo tanto una forma escalerizada es:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

En este caso la forma escalerizada tiene 2 escalones y por lo tanto rango$(A) = 2$.

Si $a \neq \pm 1$ entonces una forma escalerizada es:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{array}$$

que tiene tres escalones, por lo tanto rango$(A) = 3$.

En resumen si $a = \pm 1$ el rango$(A) = 2$ y si $a \neq \pm 1$ entonces rango$(A) = 3$.

2. El vector $\hat{X}$ es solución si cumple que $AX = \overline{0}$:

$$A\hat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \\ a-2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\hat{X}$ no es solución de $A\hat{X} = \overline{0}$.

3. Para $a = 0$, sabemos que la matriz es invertible pues la cantidad de escalones de una forma escalerizada es 3. La inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¡Verificar!

4. El sistema planteado es $AX = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por la parte anterior sabemos que A es invertible, por lo tanto el sistema es compatible determinado y su única solución está dada por:

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Determinar si los siguientes conjuntos son linealmente independientes (LI) o linealmente dependientes (LD). En caso de ser LD indicar cuáles vectores son combinación lineal de los restantes. En cada caso justifique su respuesta.

1. $A_1 = \left\{(1,2), (-1,0), (0, \frac{1}{2})\right\}$
2. $A_2 = \{(1,1,1,1), (1,0,1,0), (0,-1,-1,1)\}$
3. $A_3 = \{(-1,2,1), (2,1,-1), (1,1,1)\}$

1. A_1 es necesariamente LD por ser un conjunto de tres vectores en $\mathbb{R}^2$. También es posible concluir esto escalerizando el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

   Claramente es un sistema compatible indeterminado cuya solución es $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\alpha_3 = -4\alpha_2$. De esta realción podemos deducir cuáles vectores son combinación lineal de los restantes. Por ejemplo:

$$(1,2) = -1(-1,0) + 4(1, \frac{1}{2}).$$

2. Nos planteamos escalerizar el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Por lo tanto el sistema es compatible determinado (tres escalones con tres incógnitas) y el conjunto A_2 es LI.

3. El sistema a escalerizar es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

   Por lo tanto el sistema es compatible determinado (tres escalones con tres incógnitas) y el conjunto A_3 es LI.

Ejercicio 3 (3 puntos)

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tales que $A^2 = 4A + I$ y $B^tB = I$ donde B^t es la traspuesta de B. De las siguientes afirmaciones hay sólo una que es verdadera. Indique cuál es justificando su respuesta.

1. $2B^tA$ es invertible y su inversa es $\frac{1}{2}AB - 2B$.
2. $2B^tA$ es invertible y su inversa es $\frac{1}{2}AB^t - 2B^t$.
3. AB es invertible y su inversa es $AB - 4B$.
4. AB es invertible y su inversa $B^tA - 4A$.
5. AB no es invertible.

La ecuación $B^tB = I$ nos dice que B es invertible y que $B^{-1} = B^t$. La ecuación $A^2 = 4A + I$ la podemos escribir como $A^2 - 4A = I$ o lo que es igual $A(A - 4I) = I$, de donde obtenemos que A es invertible y que $A^{-1} = A - 4I$.

Por lo tanto ya podemos decir que AB es invertible, y por tanto concluir que la afirmación (5) es falsa. Sabemos además que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^t(A - 4I) = B^tA - 4B^t$$

lo que nos dice que las afirmaciones (3) y (4) también son falsas.
Nos queda entonces hallar la inversa de $2B^tA$, esto es:

$$(2B^tA)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}(B^{-1})^t = \frac{1}{2}(A-4I)B = \frac{1}{2}AB - 2B$$

Por lo tanto y dado que la inversa es única, la única afirmación correcta es la (1).

Esta no es la única forma de hallar la afirmación correcta. Dado que en cada caso tenemos el candidato a inversa, basta con hacer el producto y ver si obtenemos la identidad o no.