Lógica proposicional. Semántica

Lógica

Sintaxis, Semántica e Interpretación

Sintaxis de un Lenguaje

Describe el conjunto de las frases válidas del lenguaje, típicamente como un conjunto inductivo.

Semántica de un Lenguaje

Es el significado de las frases válidas del lenguaje. Usualmente involucra diversos conjuntos y relaciones entre ellos.

Interpretación de un Lenguaje

Es un mecanismo que permite la asociación entre los elementos de la sintaxis (frases del lenguaje) y los elementos de la semántica.

Sintaxis, Semántica e Interpretación de PROP

Sintaxis de un PROP

Se define un conjunto inductivo, con ciertas fórmulas base (letras proposicionales) y ciertos operadores que construyen nuevas fórmulas.

Semántica de PROP

El conjunto $\{0,1\}$ $(\{falso, verdadero\})$

Interpretación de PROP

Función recursiva que para cada elemento de PROP devuelve el valor 0 o 1 en base al valor de las letras proposicionales.

Semántica de una fórmula proposicional

Valuaciones (intuición)

- La semántica de una palabra (fórmula) de `PROP` está dada por su *valor de verdad* (o sea, si es Verdadera o Falsa).
- Ese valor se obtiene aplicando una función a la fórmula que se desea evaluar.
- Cada función representa un *estado de la realidad (o mundo)*.
  - $v(p_0) = 0, v(p_1) = 1, \ldots$ es la representación de un mundo, y $v(p_0) = 1, \ldots, v(p_2) = 1$ es una representación de otro mundo distinto.
  - En cada mundo cada proposición de PROP puede representar una afirmación distinta de la realidad.

Semántica de una fórmula proposicional

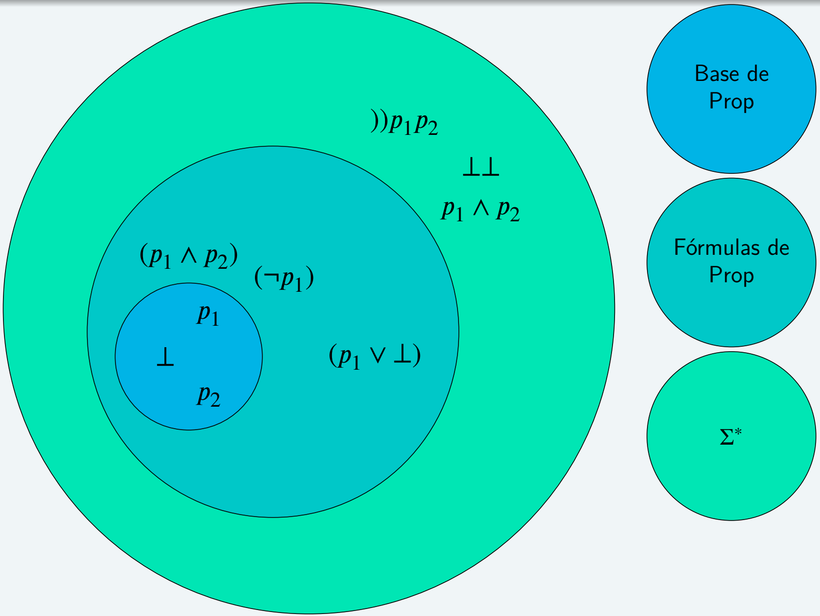
La semántica de una palabra (fórmula) de PROP está dada por su *valor de verdad* (o sea, si es Verdadera o Falsa). Ese valor se obtiene aplicando una función a la fórmula que se desea evaluar. Cada función representa un *estado del universo* que se obtiene de la siguiente forma:

- En cada función, cada una de las letras proposicionales puede tomar un valor de verdad.
- $\perp$ es falsa en cualquier función.
- Los valores de verdad de las fórmulas atómicas se extienden a las fórmulas no atómicas de acuerdo al significado de los conectivos que la forman.

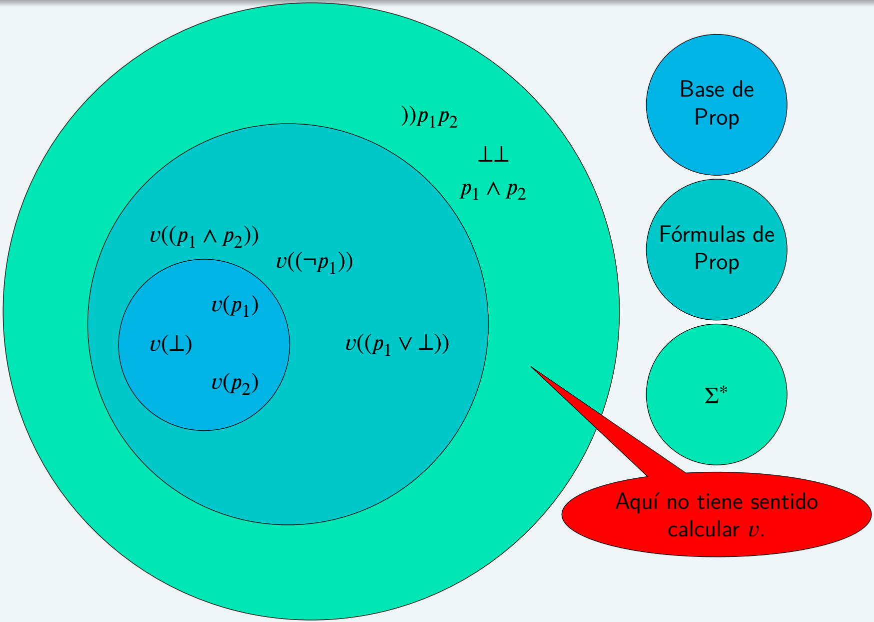
Las palabras de PROP

- Las letras proposicionales tienen un valor de verdad conocido.
- Se abstraen las proposiciones simples a letras.
- La frase "Los perros comen salchichas con tuco" colapsa a, por ejemplo, p_0.
- Y si esa frase es verdad en una situación v, diremos que $v(p_0) = 1$. Y si es falsa, diremos que $v(p_0) = 0$.

Construyendo PROP



Calculando valores de verdad



Semántica de PROP

- PROP está definido inductivamente.
- La semántica está dada por los valores de verdad de las proposiciones, ya sean simples o complejas.
- Se buscará la forma de construir esa semántica teniendo en cuenta que:
  - Las letras proposicionales pueden tomar cualquier valor.
  - El valor de las letras proposicionales se "transmite", lo que permite calcular el valor de las proposiciones complejas en función del valor de las proposiciones más simples.

Significado de algunos conectivos

- El dos es par *o* impar **Verdad**
- El dos es par *o* natural **Verdad**
- *Si* n es múltiplo de 6, *entonces* 4 es par **Verdad**
- *Si* 4 es impar, *entonces* 3 es par **Verdad**

Valuaciones

- Una valuación es una función de $\mathtt{PROP} \to \{0,1\}$ que transmite valores de verdad a partir de las letras proposicionales.
- No cualquier función de $\mathtt{PROP} \to \{0,1\}$ es una valuación.
  - $f(\alpha) = 1$ para toda $\alpha \in \mathtt{PROP}$
  - $g(\alpha) = (1 + \textsc{largo}(\alpha)) \mod 2$ para toda $\alpha \in \mathtt{PROP}$
- ¿Cómo se construyen funciones que sean valuaciones?
  - Asegurando que el valor de las fórmulas compuestas queda determinado unívocamente por los valores de las letras proposicionales.

Def. 1.2.1. Valuación

Una función v : $\mathtt{PROP} \to \{0, 1\}$ es una valuación sii satisface:

$$
\begin{aligned}
v(\bot) &= 0 \\
v((\alpha \wedge \beta)) &= \min\{v(\alpha), v(\beta)\} \\
v((\alpha \vee \beta)) &= \max\{v(\alpha), v(\beta)\} \\
v((\alpha \to \beta)) &= \max\{1 - v(\alpha), v(\beta)\} \\
v((\alpha \leftrightarrow \beta)) &= 1 \Leftrightarrow v(\alpha) = v(\beta) \\
v((\neg\alpha)) &= 1 - v(\alpha)
\end{aligned}
$$

Observación. Esta no es la definición de *una* valuación, sino la definición de *ser una* valuación; una serie de ecuaciones que garantizan la transmisión de la verdad.

Teorema 1.2.2

El valor de verdad de los átomos determina una única valuación (el valor para cualquier fórmula).

Hipótesis

Sea $w : P \to \{0, 1\}$.

Tesis

Existe una única valuación $v : \texttt{PROP} \to \{0, 1\}$ tal que $v(p) = w(p)$ para todo $p \in P$.

Teorema 1.2.2

Demostración

Considere una función v sobre $\mathtt{PROP}$ definida por recursión primitiva tal que:

- $v(p) = w(p)$ para todo $p \in P$
- v es una valuación (cumple con Def. 1.2.1)

Esta función existe y es única dado que fue definida por recursión primitiva. Además es valuación (por su propia definición).

Lema 1.2.3

El valor de verdad de una fórmula depende únicamente del valor de sus letras de proposición

Hipótesis

Sea $\alpha \in \mathtt{PROP}$. Sean v y v' dos valuaciones tales que $v(p) = v'(p)$ para toda letra p que ocurre en α.

Tesis

Entonces $v\,(\alpha) = v'\,(\alpha)$.

Def 1.2.4. Tautología, consecuencia lógica

Tautología

Decimos que $\alpha \in \mathtt{PROP}$ es una tautología ssi para cualquier valuación v se cumple que $v(\alpha) = 1$.

Consecuencia lógica

Dadas $\Gamma \subseteq \mathtt{PROP}$ y $\alpha \in \mathtt{PROP}$, α es consecuencia lógica de Γ ssi para cualquier valuación v:

$$\textit{Si } (\bar{\forall}\gamma \in \Gamma) v(\gamma) = 1, \textit{ entonces } v(\alpha) = 1.$$

Notación

$\Gamma \vDash \alpha$ se lee "α es consecuencia lógica de Γ"

$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vDash \alpha$ se lee $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vDash \alpha$

$\vDash \alpha$ se lee $\varnothing \vDash \alpha$

$\vDash \alpha$ se lee "α es tautología"

Uso directo de la definición de valuación

Investigar $\models p_0 \to p_0$

Sea v una valuación. Luego,

$$
\begin{gathered}
v\left(p_0 \to p_0\right) \\
=_{\text{(def.)}} \\
\max\left\{1 - v\left(p_0\right), v\left(p_0\right)\right\} \\
=_{\left(v\left(p_0\right) \in \{0,1\}\right)} \\
1.
\end{gathered}
$$

Como cualquier valuación cumple $v\left(p_0 \to p_0\right) = 1$, concluímos que $\models p_0 \to p_0$.

Uso directo de la definición de valuación

Investigar $\models \varphi \to \varphi$

Sea v una valuación. Luego,

$$\begin{aligned} & v(\varphi \to \varphi) \\ =_{\text{(def.)}} \; & \max\{1 - v(\varphi), v(\varphi)\} \\ =_{(v(\varphi) \in \{0,1\})} \; & 1. \end{aligned}$$

Como cualquier valuación cumple $v(\varphi \to \varphi) = 1$, concluímos que $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP}) \models \varphi \to \varphi$.

Uso directo de la definición de valuación

Investigar $\models p_1 \vee p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \to p_2$

Sea v una valuación. Luego,

$$
\begin{gathered}
v\left(p_1 \vee p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \to p_2\right) = 1 \\
\Leftarrow \text{(def.)} \\
v\left(p_1 \vee p_2\right) = v\left(\neg p_1 \to p_2\right) \\
\Leftarrow \text{(def.)} \\
\max\left\{v\left(p_1\right), v\left(p_2\right)\right\} = \max\left\{1 - v\left(\neg p_1\right), v\left(p_2\right)\right\} \\
\Leftarrow \text{(def.)} \\
\max\left\{v\left(p_1\right), v\left(p_2\right)\right\} = \max\left\{1 - 1 + v\left(p_1\right), v\left(p_2\right)\right\},
\end{gathered}
$$

y esto es inmediato. Como cualquier valuación cumple $v\left(p_1 \vee p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \to p_2\right) = 1$, concluímos que $\models p_1 \vee p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \to p_2$.

Uso directo de la definición de valuación

Investigar $\models p_0 \to p_1$

Sea v una valuación. Luego,

$$v\left(p_0 \to p_1\right) \underset{\text{(def.)}}{=} \max\left\{1 - v\left(p_0\right), v\left(p_1\right)\right\}.$$

Si $v\left(p_0\right) = 1$ y $v\left(p_1\right) = 0$, tenemos $v\left(p_0 \to p_1\right) = 0$.
Como hay una valuación v que cumple $v\left(p_0 \to p_1\right) = 0$, concluímos que $\not\models p_0 \to p_1$.

Uso directo de la definición de valuación

Investigar $\vDash (p_1 \to p_2) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)$

Sea v una valuación. Luego,

$$\begin{gathered}
v\left((p_1 \to p_2) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)\right) \\
= \min\left\{v\left(p_1 \to p_2\right), v\left(\neg(p_1 \vee p_2)\right)\right\} \\
= \min\left\{\max\left\{1 - v\left(p_1\right), v\left(p_2\right)\right\}, 1 - v\left(p_1 \vee p_2\right)\right\} \\
= \min\left\{\max\left\{1 - v\left(p_1\right), v\left(p_2\right)\right\}, 1 - \max\left\{v\left(p_1\right), v\left(p_2\right)\right\}\right\} \\
= \min\left\{\max\left\{1 - v\left(p_1\right), v\left(p_2\right)\right\}, \min\left\{1 - v\left(p_1\right), 1 - v\left(p_2\right)\right\}\right\} \\
= \min\left\{\max\left\{1 - v\left(p_1\right), v\left(p_2\right)\right\}, 1 - v\left(p_1\right), 1 - v\left(p_2\right)\right\}
\end{gathered}$$

Si $v\left(p_1\right) = 1$, tenemos $v\left((p_1 \to p_2) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)\right) = 0$.
Como hay una valuación v que cumple $v\left((p_1 \to p_2) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)\right) = 0$, concluímos que $\nvDash (p_1 \to p_2) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)$.

Uso directo de la definición de valuación

Investigar $\varphi, \psi \vDash \varphi \wedge \psi$

Sea v una valuación tal que $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 1$. Luego,

$$v(\varphi \wedge \psi) \underset{\text{(def.)}}{=} \min\{v(\varphi), v(\psi)\} \underset{(\mathit{hip.})}{=} 1.$$

Como cualquier valuación que cumple $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 1$ debe cumplir que $v(\varphi \wedge \psi) = 1$, concluímos que $(\bar{\forall}\varphi, \psi)\varphi, \psi \vDash \varphi \wedge \psi$.

Uso directo de la definición de valuación

Investigar $p_1 \models p_2 \wedge p_3$

Sea v una valuación tal que $v\left(p_1\right) = 1$.

$$v\left(p_2 \wedge p_3\right) \underset{\text{(def.)}}{=} \min\left\{v\left(p_2\right), v\left(p_3\right)\right\}.$$

Si $v\left(p_1\right) = 1$ y $v\left(p_2\right) = 0$, tenemos $v\left(p_2 \wedge p_3\right) = 0$. Como hay una valuación v que cumple $v\left(p_1\right) = 1$ y $v\left(p_2 \wedge p_3\right) = 0$, concluímos que $p_1 \not\models p_2 \wedge p_3$.

¿El argumento anterior sirve para justificar $(\bar{\forall} p, q, r \in P) p \not\models q \wedge r$?
¿Y para $(\bar{\forall} \varphi, \psi, \sigma \in \mathtt{PROP}) \varphi \not\models \psi \wedge \sigma$?

Considerando los valores de cada parte

Investigar $\vDash p_0 \to p_0$

Sea v una valuación. Luego,

Caso $v\left(p_0\right) = 0$

$$v\left(p_0 \to p_0\right) \underset{\text{(def.)}}{=} \max\left\{1 - v\left(p_0\right), v\left(p_0\right)\right\} = \max\left\{1 - 0, 0\right\}.$$

Caso $v\left(p_0\right) = 1$

$$v\left(p_0 \to p_0\right) \underset{\text{(def.)}}{=} \max\left\{1 - v\left(p_0\right), v\left(p_0\right)\right\} = \max\left\{1 - 1, 1\right\}.$$

Como cualquier valuación cumple $v\left(p_0 \to p_0\right) = 1$, concluímos que $\vDash p_0 \to p_0$.

Investigar $\varphi, \psi \vDash \varphi \wedge \psi$ (Considerando ...)

Sea υ una valuación tal que $\upsilon(\varphi) = 1$ y $\upsilon(\psi) = 1$.
Luego,

$$\upsilon(\varphi \wedge \psi)$$
$$= \text{(def.)}$$
$$\min\{\upsilon(\varphi), \upsilon(\psi)\}$$
$$= (\textit{hip.})$$
$$1.$$

Como cualquier valuación que cumple $\upsilon(\varphi) = 1$ y $\upsilon(\psi) = 1$ debe cumplir que $\upsilon(\varphi \wedge \psi) = 1$, concluímos que $(\bar{\forall}\varphi, \psi)\varphi, \psi \vDash \varphi \wedge \psi$.

Investigar $p_1 \vDash p_2 \wedge p_3$ (Considerando ...)

Sea v una valuación tal que $v(p_1) = 1$. Luego,

Caso $v(p_2) = 0$

$$v(p_2 \wedge p_3) \underset{\text{(def.)}}{=} \min\{v(p_2), v(p_3)\} = \min\{0, v(p_3)\}.$$

Si $v(p_1) = 1$ y $v(p_2) = 0$, tenemos $v(p_2 \wedge p_3) = 0$. Como hay una valuación v que cumple $v(p_1) = 1$ y $v(p_2 \wedge p_3) = 0$, concluímos que $p_1 \nvDash p_2 \wedge p_3$.

Tablas de verdad

Investigar $p_0 \to p_0$

Construimos una tabla de verdad considerando todos los valores posibles que pueden tomar las letras en juego.

p_0	$p_0 \to p_0$
0	1
1	1

Como cualquier valuación cumple $v\left(p_0 \to p_0\right) = 1$, concluímos que $\vDash p_0 \to p_0$.

Investigar $\varphi \to \varphi$ (TV)

φ	$\varphi \to \varphi$
0	1
1	1

Como cualquier valuación cumple $v(\varphi \to \varphi) = 1$, concluímos que $(\bar{\forall}\varphi) \models \varphi \to \varphi$.

¿Qué sucede cuando $\varphi = \bot$?

Investigar $p_1 \vee p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \rightarrow p_2$ (TV)

p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$	$\neg p_1$	$\neg p_1 \rightarrow p_2$	$p_1 \vee p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \rightarrow p_2$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Como cualquier valuación cumple $v\left(p_1 \vee p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \rightarrow p_2\right) = 1$, concluímos que $\models p_1 \vee p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \rightarrow p_2$.
¿En qué renglón aparece la valuación que cumple $v\left(p_3\right) = 0$?

Investigar $p_0 \to p_1$ (TV)

p_0	p_1	$p_0 \to p_1$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Como hay una valuación v que cumple $v\left(p_0 \to p_1\right) = 0$, concluímos que $\not\models p_0 \to p_1$.

Investigar $(p_1 \to p_2) \land \neg(p_1 \lor p_2)$ (TV)

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$	$p_1 \lor p_2$	$\neg(p_1 \lor p_2)$	$(p_1 \to p_2) \land (\neg(p_1 \lor p_2))$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

Como hay una valuación v que cumple $v\left((p_1 \to p_2) \land \neg(p_1 \lor p_2)\right) = 0$, concluímos que $\not\models (p_1 \to p_2) \land \neg(p_1 \lor p_2)$.

Investigar $\varphi, \psi \vDash \varphi \wedge \psi$ (TV)

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Como cualquier valuación que cumple $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 1$ debe cumplir que $v(\varphi \wedge \psi) = 1$, concluímos que $(\bar{\forall}\varphi, \psi)\varphi, \psi \vDash \varphi \wedge \psi$.

Investigar $p_1 \vDash p_2 \wedge p_3$ (TV)

p_1	p_2	p_3	$p_2 \wedge p_3$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Como hay una valuación v que cumple $v\left(p_1\right) = 1$ y $v\left(p_2 \wedge p_3\right) = 0$, conclüímos que $p_1 \nvDash p_2 \wedge p_3$.

Tableau Semántico

Investigar $\models p_0 \rightarrow p_0$

- Los Tableau Semánticos son árboles cuya raíz contiene una fórmula y un valor de verdad.
- Qué valor de verdad elegimos para la raiz depende de lo que se quiera probar.

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}.p_0 \rightarrow p_0 \ * \\ | \\ \mathbf{T}.p_0 \ \times \\ \mathbf{F}.p_0 \ \times \end{array}$$

Como ninguna valuación cumple $v\left(p_0 \rightarrow p_0\right) = 0$, conclulímos que $\models p_0 \rightarrow p_0$.

Investigar $\vDash \varphi \to \varphi$ (TS)

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}.\varphi \to \varphi \ * \\ | \\ \mathbf{T}.\varphi \ \times \\ \mathbf{F}.\varphi \ \times \end{array}$$

Como ninguna valuación cumple $v(\varphi \to \varphi) = 0$, concluímos que $\vDash \varphi \to \varphi$.

Investigar $\models p_1 \vee p_2 \to \neg p_1 \to p_2$ (TS)

$\mathsf{F}.p_1 \vee p_2 \to \neg p_1 \to p_2$ $\ast$

Como ninguna valuación cumple $v\left(p_1 \vee p_2 \to \neg p_1 \to p_2\right) = 0$, concluímos que $\models p_1 \vee p_2 \to \neg p_1 \to p_2$.

Investigar $\vDash p_0 \rightarrow p_1$ (TS)

$$\mathbf{F}.p_0 \rightarrow p_1 \ *$$
$$|$$
$$\mathbf{T}.p_0$$
$$\mathbf{F}.p_1$$

Las valuaciones que cumplen $v\left(p_0\right) = 1$ y $v\left(p_1\right) = 0$ muestran que $\nvDash p_0 \rightarrow p_1$.

Investigar $\models (p_1 \to p_2) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)$ (TS)

$$\mathbf{F}.(p_1 \to p_2) \wedge \neg(p_1 \vee p_2) \; *$$

$$\mathbf{F}.p_1 \to p_2 \; * \qquad\qquad \ldots$$

$$\mathbf{T}.p_1$$

$$\mathbf{F}.p_2$$

Las valuaciones que cumplen $v\left(p_1\right) = 1$ y $v\left(p_2\right) = 0$ muestran que $\not\models (p_1 \to p_2) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)$. Esto hace que no sea necesario seguir con la rama derecha del tableau.

Investigar $\varphi, \psi \vDash \varphi \wedge \psi$ (TS)

$$\mathbf{T}.\varphi$$
$$\mathbf{T}.\psi$$
$$\mathbf{F}.\varphi \wedge \psi \; *$$

$\mathbf{T}.\varphi \; \times$	$\mathbf{T}.\varphi$
$\mathbf{T}.\psi$	$\mathbf{T}.\psi \; \times$
$\mathbf{F}.\varphi \; \times$	$\mathbf{F}.\psi \; \times$

Como ninguna valuación que cumple $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 1$ cumple $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, concluímos que $\varphi, \psi \vDash \varphi \wedge \psi$.

Investigar $p_1 \vDash p_2 \wedge p_3$

$$\begin{array}{c} \mathbf{T}.p_1 \\ \mathbf{F}.p_2 \wedge p_3 \; * \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \mathbf{T}.p_1 \\ \mathbf{F}.p_2 \end{array} & \quad \ldots \end{array}$$

Las valuaciones que cumplen $v\left(p_2\right) = 0$ y $v\left(p_1\right) = 1$ muestran que $p_1 \nvDash p_2 \wedge p_3$. No es necesario seguir con el tableau en este caso.

Reglas de las tableau semántico

	F	**T**
$\to$	$\mathbf{F}.\varphi \to \psi$ $\mathbf{T}.\varphi$ $\mathbf{F}.\psi$	$\mathbf{T}.\varphi \to \psi$ $\mathbf{F}.\varphi$ | $\mathbf{T}.\psi$
$\leftrightarrow$	$\mathbf{F}.\varphi \leftrightarrow \psi$ $\mathbf{T}.\varphi$, $\mathbf{F}.\psi$ | $\mathbf{F}.\varphi$, $\mathbf{T}.\psi$	$\mathbf{T}.\varphi \leftrightarrow \psi$ $\mathbf{T}.\varphi$, $\mathbf{T}.\psi$ | $\mathbf{F}.\varphi$, $\mathbf{F}.\psi$
$\neg$	$\mathbf{F}.\neg\varphi$ $\mathbf{T}.\varphi$	$\mathbf{T}.\neg\varphi$ $\mathbf{F}.\varphi$

Reglas de las tableau semántico

	$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$
$\wedge$	$\mathbf{F}.\varphi \wedge \psi$ $\mathbf{F}.\varphi \qquad \mathbf{F}.\psi$	$\mathbf{T}.\varphi \wedge \psi$ $\mathbf{T}.\varphi$ $\mathbf{T}.\psi$
$\vee$	$\mathbf{F}.\varphi \vee \psi$ $\mathbf{F}.\varphi$ $\mathbf{F}.\psi$	$\mathbf{T}.\varphi \vee \psi$ $\mathbf{T}.\varphi \qquad \mathbf{T}.\psi$
$\perp$	$\mathbf{F}.\perp$	$\mathbf{T}.\perp$ ✕

Tautología, contradicción y contingencia

Tautologías Fórmulas que son verdaderas en todas las valuaciones.

Contingencias Fórmulas que son verdaderas en algunas valuaciones y falsa en otras.

Contradicciones Fórmulas que son falsas en todas las valuaciones.

Cuando se trabaja con implicaciones, puede ser más simple analizar cuando *no* es tautología.

Cuando se trabaja con consecuencias lógicas, puede ser más simple analizar cuando *no* se cumple.

Tautologías

$$
\begin{aligned}
&\models \quad \alpha \leftrightarrow \alpha \\
&\models \quad \alpha \vee \alpha \leftrightarrow \alpha \\
&\models \quad \alpha \vee \beta \leftrightarrow \beta \vee \alpha \\
&\models \quad (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta \\
&\models \quad (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \beta \leftrightarrow \alpha \\
&\models \quad \alpha \wedge \neg\alpha \leftrightarrow \bot
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\models \quad \alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha \\
&\models \quad \alpha \wedge \alpha \leftrightarrow \alpha \\
&\models \quad \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha \\
&\models \quad (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \\
&\models \quad (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha
\end{aligned}
$$

¿Tautologías?

$$
\begin{aligned}
&\models \quad \bot \rightarrow \alpha \\
&\models \quad \alpha \vee \beta \vee \gamma \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \\
&\models \quad \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)
\end{aligned}
$$

Equivalencia en PROP

Def. Equivalencia entre proposiciones

Dos fórmulas proposicionales α y β son equivalentes sii $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología

Notación

α eq β

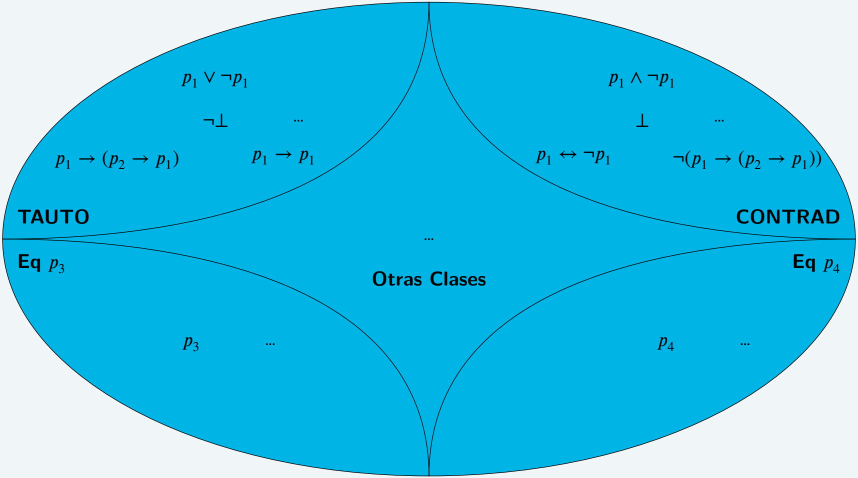
Observación

Se cumple α eq β si y sólo si para cualquier valuación $v : \mathrm{PROP} \to \{0, 1\}$ se cumple $v(\alpha) = v(\beta)$.

Lema 1.3.5

La relación eq es de equivalencia en $\mathrm{PROP} \times \mathrm{PROP}$

Equivalencia en PROP. Clases de equivalencia



Leyes algebraicas

$$
\begin{aligned}
&\models (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \leftrightarrow \alpha \vee \beta \vee \gamma \\
&\models \alpha \vee \beta \leftrightarrow \beta \vee \alpha \\
&\models \alpha \vee \alpha \leftrightarrow \alpha \\
&\models \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha \\
&\models \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \\
&\models \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \ &\text{eq} \ \alpha \vee \beta \vee \gamma \\
\alpha \vee \beta \ &\text{eq} \ \beta \vee \alpha \\
\alpha \vee \alpha \ &\text{eq} \ \alpha \\
\alpha \vee \alpha \ &\text{eq} \ \alpha \\
\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \ &\text{eq} \ \alpha \\
\neg(\alpha \vee \beta) \ &\text{eq} \ \neg\alpha \wedge \neg\beta
\end{aligned}
$$

Leyes algebraicas

$$\begin{aligned}
&\models (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \leftrightarrow \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \\
&\models \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha \\
&\models \alpha \wedge \alpha \leftrightarrow \alpha \\
&\models \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \alpha \\
&\models \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \\
&\models \neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &\ \mathsf{eq}\ \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \\
\alpha \wedge \beta &\ \mathsf{eq}\ \beta \wedge \alpha \\
\alpha \wedge \alpha &\ \mathsf{eq}\ \alpha \\
\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) &\ \mathsf{eq}\ \alpha \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) &\ \mathsf{eq}\ (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \\
\neg(\alpha \wedge \beta) &\ \mathsf{eq}\ \neg\alpha \vee \neg\beta
\end{aligned}$$

Leyes algebraicas

$$\models \neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$$

$$\neg\neg\alpha \text{ eq } \alpha$$

Equivalencias entre conectivos

$$\begin{aligned}
\alpha \leftrightarrow \beta \ &\text{eq} \ (\alpha \to \beta) \land (\beta \to \alpha) \\
\alpha \to \beta \ &\text{eq} \ \neg\alpha \lor \beta \\
\alpha \lor \beta \ &\text{eq} \ \neg\alpha \to \beta \\
\alpha \lor \beta \ &\text{eq} \ \neg(\neg\alpha \land \neg\beta) \\
\alpha \land \beta \ &\text{eq} \ \neg(\neg\alpha \lor \neg\beta) \\
\neg\alpha \ &\text{eq} \ \alpha \to \bot \\
\bot \ &\text{eq} \ \alpha \land \neg\alpha
\end{aligned}$$

Más ejemplos de consecuencia lógica

$$\begin{aligned}
\alpha, \beta &\models \alpha \wedge \beta \\
\alpha &\models \alpha \vee \beta \\
\beta &\models \alpha \vee \beta \\
\alpha \vee \beta, \neg\alpha &\models \beta \\
\alpha \vee \beta, \neg\beta &\models \alpha \\
\alpha, \neg\alpha &\models \bot \\
\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta &\models \neg\alpha \\
\alpha \leftrightarrow \beta, \alpha &\models \beta \\
\alpha \leftrightarrow \beta, \neg\alpha &\models \neg\beta
\end{aligned}$$

Lemas Auxiliares

Lema 1.3.2

Hipótesis

$\models \alpha \to \beta$

Tesis

$\alpha \wedge \beta$ eq α y $\alpha \vee \beta$ eq β

Lema 1.3.3

a. Si $\models \alpha$ entonces $\alpha \wedge \beta$ eq β
b. Si $\models \alpha$ entonces $\neg\alpha \vee \beta$ eq β
c. $\bot \vee \beta$ eq β
d. $\neg\bot \wedge \beta$ eq β

Sustitución.

$\_[\_/\_] : \mathrm{PROP} \times \mathrm{PROP} \times P \to \mathrm{PROP}$

i $\bot[\varphi/p] = \bot$

ii $q[\varphi/p] = \begin{cases} \varphi & \text{si } p = q \\ q & \text{si } p \neq q \end{cases}$

iii $(\alpha * \beta)[\varphi/p] = (\alpha[\varphi/p] * \beta[\varphi/p])$

iv $(\neg\alpha)[\varphi/p] = (\neg\alpha[\varphi/p])$

Sustitución por fórmulas equivalentes

- Si α_1 y α_2 son equivalentes, entonces puedo sustituir una letra proposicional de una fórmula β cualquiera por α_1 y por α_2, y obtener fórmulas equivalentes.
- Esto se utiliza mucho en matemática: no dudamos en afirmar la siguiente igualdad

$$3 \times (2+5) = 3 \times 7$$

- ¿Por qué vale esa igualdad?
    - Porque sabemos que $2+5=7$
    - y reemplazamos iguales por iguales
- Esto es, en la expresión $3 \times \xi$ sustituimos a ξ por $(2+5)$ y por 7, y obtenemos dos números iguales.

Sustitución por fórmulas equivalentes

Teorema de sustitución 1.2.5

Hipótesis

α_1 eq α_2

Tesis

Para cualesquiera $\beta \in \mathtt{PROP}$ y $p \in P$, se cumple

$$\beta[\alpha_1/p] \text{ eq } \beta[\alpha_2/p]$$

Teorema de sustitución 1.2.5

Observemos ...

$$
\begin{gathered}
\alpha_1 \text{ eq } \alpha_2 \\
\Rightarrow (\bar{\forall} v) v\left(\alpha_1\right) = v\left(\alpha_2\right) \\
{\color{blue}\Rightarrow} (\bar{\forall} v, \beta, p) v\left(\beta[\alpha_1/p]\right) = v\left(\beta[\alpha_2/p]\right) \\
\Rightarrow (\bar{\forall} \beta, p) \beta[\alpha_1/p] \text{ eq } \beta[\alpha_2/p].
\end{gathered}
$$

Lema

Hipótesis Sean v, α_1, α_2 tales que $v\left(\alpha_1\right) = v\left(\alpha_2\right)$.

Tesis Para cualesquiera $\beta \in \mathtt{PROP}$ y $p \in \boldsymbol{P}$, se cumple $v\left(\beta[\alpha_1/p]\right) = v\left(\beta[\alpha_2/p]\right)$.

Pruebe el lema explicitando la propiedad que busca y usando el PIP adecuado.

Investigar $(p_1 \to p_2) \land \neg(p_1 \lor p_2)$ (eq)

$$(p_1 \to p_2) \land \neg(p_1 \lor p_2)$$
eq $(\beta = p \land \neg(p_1 \lor p_2), \alpha_1 = p_1 \to p_2, \alpha_2 = \neg p_1 \lor p_2)$
$$(\neg p_1 \lor p_2) \land \neg(p_1 \lor p_2)$$
eq $(\beta = (\neg p_1 \lor p_2) \land p, \alpha_1 = \neg(p_1 \lor p_2), \alpha_2 = \neg p_1 \land \neg p_2)$
$$(\neg p_1 \lor p_2) \land \neg p_1 \land \neg p_2$$
eq
$$((\neg p_1 \lor p_2) \land \neg p_1) \land \neg p_2$$
eq $(\beta = p \land \neg p_2, \alpha_1 = (\neg p_1 \lor p_2) \land \neg p_1, \alpha_2 = \neg p_1)$¿Por qué? Completar.
$$\neg p_1 \land \neg p_2.$$

Si $v(p_1) = 1$ y $v(p_2) = 1$, tenemos $v(\neg p_1 \land \neg p_2) = 0$. Como hay una valuación v que cumple $v(\neg p_1 \lor p_2) = 0$ y $(p_1 \to p_2) \land \neg(p_1 \lor p_2)$ eq $\neg p_1 \lor p_2$, concluímos que $\not\models (p_1 \to p_2) \land \neg(p_1 \lor p_2)$.

Investigar $p_1 \lor p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \to p_2$ (eq)

$$\neg p_1 \to p_2$$
$$\text{eq}$$
$$\neg\neg p_1 \lor p_2$$
$$\text{eq}\ (\beta = p \lor p_2, \alpha_1 = \neg\neg p_1, \alpha_2 = p_1)$$
$$p_1 \lor p_2.$$

Como $p_1 \lor p_2$ eq $\neg p_1 \to p_2$, concluímos que $\models p_1 \lor p_2 \leftrightarrow \neg p_1 \to p_2$.

Conectivas n-arias

Sea $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Una conectiva lógica n-aria $\$$ queda definida por la función f si para cualquier valuación v se cumple

$$(\bar{\forall} q^1, \ldots, q^n \in P) v\left(\$\left(q^1, \ldots, q^n\right)\right) = f\left(v\left(q^1\right), \ldots, v\left(q^n\right)\right)$$

Conjuntos completos de conectivos

K es un conjunto completo de conectivos si para cada conectivo n-ario $\$$ y letras proposicionales $q^1, \ldots, q^n$ existe una fórmula $\sigma \in \mathtt{PROP}$ cuyos conectivos están en K, sus letras en $\left\{q^1, \ldots, q^n\right\}$, y tal que σ eq $\$\left(q^1, \ldots, q^n\right)$.

Conectivas unarias (1/2)

q^1	$\$\left(q^1\right)$	q^1
0	0	0
1	1	1

q^1	$\$\left(q^1\right)$	$\neg q^1$
0	1	1
1	0	0

Conectivas unarias (2/2)

q^1	$\$ (q^1)$	$\neg q^1$	$q^1 \vee \neg q^1$
0	1	1	1
1	1	0	1

q^1	$\$ (q^1)$	$\neg q^1$	$q^1 \vee \neg q^1$	$\neg(q^1 \vee \neg q^1)$
0	0	1	1	0
1	0	0	1	0

Conectivas binarias (1/8)

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	q^1
0	0	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	1	1

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	q^2
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	1	1

Conectivas binarias (2/8)

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$\neg q^1$
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	0

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$\neg q^2$
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	0

Conectivas binarias (3/8)

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$\neg q^1$	$q^1 \vee \neg q^1$
0	0	1	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	1	1	0	1

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$\neg q^1$	$q^1 \vee \neg q^1$	$\neg(q^1 \vee \neg q^1)$
0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

Conectivas binarias (4/8)

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$q^1 \vee q^2$
0	0	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$q^1 \vee q^2$	$\neg(q^1 \vee q^2)$
0	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

Conectivas binarias (5/8)

q^1	q^2	$\$ (q^1, q^2)$	$\neg q^1$	$\neg q^1 \vee q^2$
0	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	1	1	0	1

q^1	q^2	$\$ (q^1, q^2)$	$\neg q^1$	$\neg q^1 \vee q^2$	$\neg(\neg q^1 \vee q^2)$
0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

Conectivas binarias (6/8)

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$\ldots$
0	0	1	$\ldots$
1	0	1	$\ldots$
0	1	0	$\ldots$
1	1	1	$\ldots$

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$\ldots$
0	0	0	$\ldots$
1	0	0	$\ldots$
0	1	1	$\ldots$
1	1	0	$\ldots$

Conectivas binarias (7/8)

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$\ldots$
0	0	1	$\ldots$
1	0	1	$\ldots$
0	1	1	$\ldots$
1	1	0	$\ldots$

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$\ldots$
0	0	0	$\ldots$
1	0	0	$\ldots$
0	1	0	$\ldots$
1	1	1	$\ldots$

Conectivas binarias (8/8)

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	$\neg q^1$	$\neg q^2$	$q^1 \vee \neg q^2$	$\neg q^1 \vee q^2$	$\neg(q^1 \vee \neg q^2)$	$\neg(\neg q^1 \vee q^2)$	$\neg(q^1 \vee \neg q^2) \vee \neg(\neg q^1 \vee q^2)$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0

q^1	q^2	$\$\left(q^1, q^2\right)$	...
0	0	1	...
1	0	0	...
0	1	0	...
1	1	1	...

Conjuntos completos de conectivos

Teorema 1.3.6

El conjunto $\{\neg, \vee\}$ es un conjunto completo de conectivos.

Otros conjuntos completos de conectivos

- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\bot, \rightarrow\}$
- $\{\neg, \rightarrow\}$

Notación. Conjunciones y disyunciones

Definición 1.3.7

$$
\begin{aligned}
\bigwedge_{i\leq 0}\varphi_i &= \varphi_0\\
\bigwedge_{i\leq n+1}\varphi_i &= \bigwedge_{i\leq n}\varphi_i \wedge \varphi_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bigvee_{i\leq 0}\varphi_i &= \varphi_0\\
\bigvee_{i\leq n+1}\varphi_i &= \bigvee_{i\leq n}\varphi_i \vee \varphi_{n+1}
\end{aligned}
$$

Formas normales

Definición 1.3.8

Forma Normal Conjuntiva

Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* sii es de la forma $\bigwedge_{i\leq n}(\bigvee_{j\leq m_i}\varphi_{ij})$ donde cada φ_{ij} es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

Forma Normal Conjuntiva

Una fórmula está en *forma normal disyuntiva* sii es de la forma $\bigvee_{i\leq n}(\bigwedge_{j\leq m_i}\varphi_{ij})$ donde cada φ_{ij} es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

Formas normales

Teorema 1.3.9

Para toda $\alpha \in \mathtt{PROP}$ existen fórmulas α^c y α^d en forma normal conjuntiva y forma normal disyuntiva respectivamente tales que

$$\alpha \text{ eq } \alpha^c \qquad \text{y} \qquad \alpha \text{ eq } \alpha^d.$$