Optimización bajo Incertidumbre
4. Teoría

Carlos Testuri – Germán Ferrari

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2003-2022

Contenido

Programa de dos etapas con recurso fijo (determinista)

Formulación clásica [Dantzig 1955, Beale 1955]

Sea el problema estocástico lineal de dos etapas con recurso fijo,

$$\begin{array}{rl} \min & c^\tau x + \mathbb{E}_\xi[q(\omega)^\tau y(\omega)] \\ \text{s.a} & Ax = b, \\ & T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega), \\ & x \geq 0, y(\omega) \geq 0, \end{array}$$

donde las variables $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ y $y(\omega) \in \mathbb{R}^{n_2}$ para cada $\omega \in \Omega$.
Sean los parámetros deterministas $c \in \mathbb{R}^{n_1}$, $b \in \mathbb{R}^{m_1}$, $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ y *matriz de recurso* $W \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$.
Para cada ω, *matriz tecnológica* $T(\omega) \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $q(\omega) \in \mathbb{R}^{n_2}$ y $h(\omega) \in \mathbb{R}^{m_2}$.
Los que juntos definen el vector $\xi(\omega)^\tau := [q(\omega)^\tau, h(\omega)^\tau, T_{1.}(\omega), ..., T_{m_2.}(\omega)]$.
Sea $\Xi \subseteq \mathbb{R}^{n_2 + m_2 \times (n_1+1)}$ el soporte de ξ, tal que $P(\xi \in \Xi) = 1$.
Donde las restricciones tienen lugar casi seguramente.

Programa de dos etapas con recurso fijo
Programa equivalente determinista (PED) o proyectado

Dados el vector de decisiones de primer etapa x, los eventos aleatorios $\omega \in \Omega$, el vector aleatorio $\xi(\omega)$ y el vector de decisiones de segunda etapa y,

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.a} & Ax = b, \\ & x \geq 0; \end{array}$$

donde

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_\xi Q(x, \xi(\omega))$$

y

$$Q(x, \xi(\omega)) = \min_y \{q(\omega)^T y | Wy = h(\omega) - T(\omega)x, y \geq 0\}.$$

Aplicable tanto para distribuciones de probabilidad discretas como continuas. La complejidad radica en el cálculo de $\mathcal{Q}(x)$.

Conjuntos factibles 1/4

La factibilidad del problema de segunda etapa depende de que la matriz de recurso W sea fija (determinista). Dados x y ξ fijos,

$$Q(x,\xi(\omega)) = \min_{y}\{q(\omega)^T y | Wy = h(\omega) - T(\omega)x, y \geq 0\}.$$

$$Q(x,\xi(\omega)) = \begin{cases} -\infty & \text{no acotado} \\ +\infty & \text{no factible} \\ \text{otro} & \end{cases}$$

Considerando ξ discreta y finita, $\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_{\xi} Q(x,\xi)$ es la suma ponderada con coeficientes positivos de las realizaciones de ξ.
Dados los conjuntos factibles de primer y segunda etapa $K_1 = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ y $K_2 = \{x | \mathcal{Q}(x) < \infty\}$, respectivamente, se puede redefinir el problema como

$$\min\{c^T x + \mathcal{Q}(x) \mid x \in K_1 \cap K_2\}.$$

Conjuntos factibles 2/4

No es necesario tener una descripción completa de la factibilidad de la segunda etapa, solo interesa saber si para un x en particular el valor de la segunda etapa es finito.

Una definición alternativa a K_2, dados los conjuntos factibles elementales

$$K_2(\xi) = \{x \mid \mathcal{Q}(x,\xi) < +\infty\},$$

es

$$\begin{aligned} K_2^P &= \textstyle\bigcap_{\xi\in\Xi} K_2(\xi) \\ &= \{x \mid \forall\xi \in \Xi, \exists y \geq 0 \text{ s.a } Wy = h - Tx\}. \end{aligned}$$

Una decisión x pertenece a K_2^P si, para todo valor posible de ξ, alguna decisión factible de segunda-etapa y puede ser tomada.

Los conjuntos K_2 y K_2^P pueden ser distintos para un parámetro aleatorio continuo.

Conjuntos factibles 3/4

Teorema (1)

a. *Para cada ξ, $K_2(\xi)$ es un poliedro, por lo tanto K_2^P es cerrado y convexo.*
b. *Cuando Ξ es finito, K_2^P es además poliédrico y coincide con K_2.*

Prueba.

a. $K_2(\xi)$ es definido mediante restricciones lineales para cada ξ; K_2^P es la intersección de dichos conjuntos.
b. $(\Leftarrow)$ $x \in K_2$, si $\mathcal{Q}(x)$ esta acotada superiormente. $\mathcal{Q}(x)$ esta acotada superiormente solo si $Q(x,\xi)$ esta acotada superiormente (asumiendo que $+\infty + (-\infty) = +\infty$), lo que implica que $x \in K_2(\xi)$ para todo $\xi \in \Xi$, lo que a su vez implica que $x \in K_2^P$.
   $(\Rightarrow)$ Si $x \in K_2^P$ entonces $Q(x,\xi)$ esta acotada superiormente para todo ξ, lo que implica que $\mathcal{Q}(x)$ esta acotada superiormente y que $x \in K_2$.

$\square$

Conjuntos factibles 4/4

Teorema (2)

Si ξ tiene momentos de segundo orden finitos, entonces

$$P(\omega \mid Q(x,\xi) < \infty) = 1 \text{ implica } \mathcal{Q}(x) < \infty.$$

Teorema (3)

Cuando el recurso W es fijo y ξ tiene momentos de segundo orden finitos:

a. *Los conjuntos K_2 y K_2^P coinciden.*
b. *K_2 es cerrado y convexo.*
c. *Si T es fijo, entonces K_2 es poliédrico.*
d. *Sea Ξ_T el soporte de la distribución de T. Si $h(\xi)$ y $T(\xi)$ son independientes y Ξ_T es poliédrico, entonces K_2 es poliédrico.*

Función de segunda etapa

Teorema (4)

Cuando el recurso W es fijo, $Q(x, \xi)$ es

a. *una función convexa lineal a trozos de (h, T),*
b. *una función cóncava lineal a trozos de q,*
c. *una función convexa lineal a trozos de x, para todo $x \in K_1 \cap K_2$.*

Prueba.

(a y c.) Equivalente a probar que $f(b) = \min \{q^T y | Wy = b, y \geq 0\}$ es convexa con respecto a b. Sea $S = \{Wy | y \geq 0\}$ convexo. Dados b_1 y b_2, elementos de S, se tienen las soluciones correspondientes $q^T y_1 = f(b_1)$ y $q^T y_2 = f(b_2)$. Dado $\lambda \in [0, 1]$, el vector $y_\lambda = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in S$ y satisface $W y_\lambda = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2$; es decir, y_λ es una solución factible al problema con $b = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2$.
Por lo tanto $f(\lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2) \leq q^T y_\lambda = q^T (\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2) =$
$\lambda q^T y_1 + (1 - \lambda) q^T y_2 = \lambda f(b_1) + (1 - \lambda) f(b_2)$. □

Función de recurso

Teorema (5)

En un problema estocástico con recurso W fijo y vector aleatorio ξ con momentos de segundo orden finitos,

a. *$\mathcal{Q}(x)$ es una función convexa Lipschitciana y es finita en K_2.*
b. *Cuando ξ es finito, $\mathcal{Q}(x)$ es lineal a trozos.*
c. *Si $F(\xi)$ es una distribución continua absoluta, entonces $\mathcal{Q}(x)$ es diferenciable en el interior relativo de K_2.*

Observaciones

- Cuando las variables aleatorias son discretas, el conjunto factible K_2 es poliédrico, la función de recurso $\mathcal{Q}(x)$ es lineal a trozos y convexa en K_2. Esto permite la resolución mediante descomposición.
- Cuando las variables aleatorias son definidas sobre densidades de probabilidad continuas absolutas y con momentos de segundo orden finitos, K_2 y K_2^P coinciden y $\mathcal{Q}(x)$ es diferenciable y convexa. Resolución mediante programación no lineal.

Condiciones de Optimalidad
Existencia

Condiciones suficientes para garantizar la existencia de la solución del problema PED.

Teorema (6)

Cuando ξ tiene momentos de segundo orden finitos y se cumple uno de

a. *la región factible K es acotada; o*
b. *la función de recurso es lineal en todas las direcciones de recesión de K, es decir $\mathcal{Q}(x + \lambda v) = \mathcal{Q}(x + \mu v) + (\lambda - \mu) rc\mathcal{Q}(v)$ para algún $\mu > 0$, para todo $\lambda > \mu$, y alguna constante $rc\mathcal{Q}(v)$, para todo v tal que $x + \lambda v \in K$ y para todo $x \in K$ y $\lambda > 0$.*

Entonces, si el problema PED tiene valor óptimo finito, la solución es alcanzada para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

La condición (b) se obtiene si T es fijo y Ξ es compacto.

Condiciones de Optimalidad
Caracterización

La caracterización de la solución es obtenida según las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Teorema (7)

Cuando el problema PED tiene valor óptimo finito; una solución $x^* \in K_1$ *es óptima, si y solo si existen* $\lambda^* \in \mathbb{R}^{m_1}$ *y* $\mu^* \in \mathbb{R}^{n_1}$*, tales que* $\mu^* \geq 0$, $\mu^{*\tau} x^* = 0$ *y*

$$-c + A^\tau \lambda^* + \mu^* \ \in \ \partial \mathcal{Q}(x^*).$$

Si $\mathcal{Q}(x)$ es diferenciable, entonces los subgradientes pueden ser sustituidos por el gradiente: $-c + A^\tau \lambda^* + \mu^* = \nabla \mathcal{Q}(x^*)$.

Casos especiales de recurso

- *Recurso relativamente completo*
  Si toda solución x que satisface las restricciones de primer-etapa, $Ax = b$, también es factible en la segunda etapa. Es decir $K_1 \subset K_2$.
  Difícil de determinar, requiere conocimiento de K_1 y K_2.

- *Recurso completo* (caso especial de relativamente completo)
  Cuando existe $y \geq 0$ tal que $Wy = t$ para todo $t \in \mathbb{R}^{m_2}$ (W contiene una base lineal positiva de $\mathbb{R}^{m_2}$).
  Asegura que ningún caso produce resultados no factibles.
  En la práctica se busca que los modelos tengan esta propiedad para garantizar la factibilidad.

- *Recurso simple*
  ...

Recurso simple

Cuando $W = [I, -I]$, donde separando según componentes $y = (y^+, y^-)$ y $q = (q^+, q^-)$; entonces, los valores de $y_i^+(\omega)$ e $y_i^-(\omega)$ son determinados por el signo de $h_i(\omega) - T_{i\cdot}(\omega)x$ cuando $q_i^+(\omega) + q_i^-(\omega) \geq 0$ con probabilidad uno.

Dado que $y_i^+(\omega) - y_i^-(\omega) = h_i(\omega) - T_{i\cdot}(\omega)x$, si $q_i^+(\omega) + q_i^-(\omega) \geq 0$ con probabilidad uno, entonces
$Q(x, \xi) = \sum_{i=1}^{m} \left(q_i^+(\omega)[h_i(\omega) - T_{i\cdot}(\omega)x]^+ + q_i^-(\omega)[-h_i(\omega) + T_{i\cdot}(\omega)x]^+ \right)$ es finita para todo ω.

En dicho caso $\mathcal{Q}(x)$ es finita y separable
$\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^{m_2} \mathcal{Q}_i(x)$ donde $\mathcal{Q}_i(x) = \mathbb{E}_\omega[Q_i(x, \xi(\omega))]$, y
$Q_i(x, \xi(\omega)) = q_i^+(\omega)[h_i(\omega) - T_{i\cdot}(\omega)x]^+ + q_i^-(\omega)[-h_i(\omega) + T_{i\cdot}(\omega)x]^+$.

Programación estocástica entera

Formulaciones con restricciones de integridad sobre las variables de primer y/o segunda etapa.

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x + \mathbb{E}_\xi \min \{q^T(\omega) y \mid Wy = h(\omega) - T(\omega)x, y \in Y\} \\ \text{s.a} & Ax = b, x \in X. \end{array}$$

Si hay solo restricciones de integridad en X, entonces las propiedades de $\mathcal{Q}(x)$ y K_2 son las mismas que en caso continuo.

Restricciones de integridad en Y implican mayores desafíos; el valor de la función depende de la resolución de un problema de programación entera, en la cual se usan operadores de maximización y redondeo (funciones de Gomory y Chvatal).
Generalmente $\mathcal{Q}(x)$ es discontinua y no convexa.

Programación estocástica entera

$\mathcal{Q}(x)$ es discontinua y no convexa

Ejemplo. La decisión de primer etapa es única con $x \geq 0$ y la función de recurso de segunda etapa es

$$Q(x, \xi) = \min \{2y_1 + y_2 \,|\, y_1 \geq x - \xi, y_2 \geq \xi - x, y \geq 0 \, \text{entera}\},$$

donde ξ toma valores 1 y 2 con igual probabilidad, $\frac{1}{2}$.

Dado $\xi = 1$, para $x \leq 1$, la solución óptima es $y_1 = 0$, $y_2 = \lceil 1 - x \rceil$;
para $x \geq 1$, la solución óptima es $y_1 = \lceil x - 1 \rceil$ y $y_2 = 0$.
Por lo tanto, $Q(x, 1) = \max\{2\lceil x - 1 \rceil, \lceil 1 - x \rceil\}$ es discontinua en $x = 1$ y no es convexa, ya que $Q(0{,}5, 1) = 1 > 0{,}5Q(0, 1) + 0{,}5Q(1, 1) = 0{,}5$.

Similarmente, dado $\xi = 2$, $Q(x, 2) = \max\{2\lceil x - 2 \rceil, \lceil 2 - x \rceil\}$ es discontinua en $x = 2$ y no es convexa.

Finalmente, $\mathcal{Q}(x)$ es discontinua y no convexa.

Programación estocástica entera
Otras propiedades

a. La función de recurso esperado $\mathcal{Q}(x)$ de un problema entero con variable aleatoria absolutamente continua es continua (pero generalmente no es convexa).
b. El conjunto de factibilidad de segunda etapa $K_2(\xi) = \{x \mid Q(x, \xi) < \infty\}$ es en general no convexo.
c. Unimodularidad total. Si la formulación extensiva del problema tiene una matriz de restricciones totalmente unimodular, entonces la solución del problema continuo es entera si los términos independientes son enteros.

Finalmente, resolver $\mathcal{Q}(x)$ para un x dado tiene las dificultades computacionales de la programación entera.
Los casos de resolución con razonables recursos computacionales son excepcionales. Uno de ellos es el de recurso entero simple.

Recurso entero simple

Dado ξ con soporte $\Xi \subseteq \mathbb{R}^m$, esperanza μ y función de distribución $F(t) = P\{\xi \leq t\}$, el problema estocástico de dos etapas con recurso entero simple es

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x + \mathbb{E}_\xi \min\{(q^+)^T y^+ + (q^-)^T y^- \mid \\ & \quad y^+ \geq \xi - Tx, y^- \geq Tx - \xi, y^+, y^- \in Z_+^m\} \\ \text{s.a} & Ax = b, x \in X. \end{array}$$

$\mathcal{Q}(x)$ es separable sobre la suma de las coordenadas (independientes); dado $\chi := Tx$, entonces

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^m \psi_i(\chi_i)$$

donde $\psi_i(\chi_i) = \mathbb{E}_{\xi_i}\psi_i(\chi_i, \xi_i)$ y
$\psi_i(\chi_i, \xi_i) = \min\{q_i^+ y_i^+ + q_i^- y_i^- \mid y_i^+ \geq \xi_i - \chi_i, y_i^- \geq \chi_i - \xi_i, y_i^+, y_i^- \in Z_+\}$.

Recurso entero simple
Propiedades

Las diferencias entre χ_i y ξ_i son cubiertas por la variable entera y_i en la segunda etapa.
Dados sendos déficit y exceso esperados de estas compensaciones

$$u_i(\chi_i) = \mathbb{E}\lceil \xi_i - \chi_i \rceil^+, \quad v_i(\chi_i) = \mathbb{E}\lceil \chi_i - \xi_i \rceil^+;$$

donde $\lceil \cdot \rceil^+ := \max\{\lceil \cdot \rceil, 0\}$.

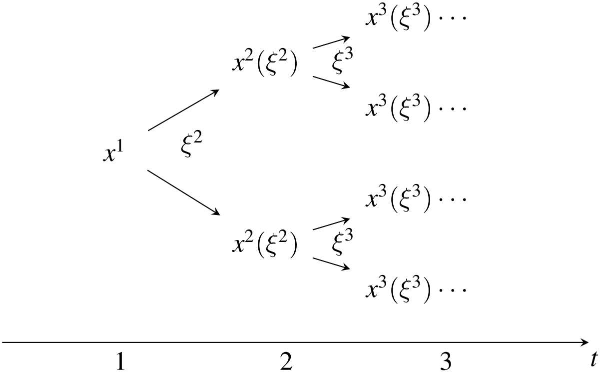
Entonces

$$\psi_i(\chi_i) = q_i^+ u_i(\xi_i) + q_i^- v_i(\chi_i).$$

El problema se reduce al estudio de los déficit y excesos esperados.
En general estos son discontinuos y no convexos; pero hay propiedades que permiten establecen su finitud y complejidad computacional.

Programa estocástico de múltiples etapas

La resolución de muchos problemas implica una secuencia de decisiones x^t que tienen en cuenta eventos aleatorios ξ^t que evolucionan con el tiempo t,



Ej. Planificación financiera

Se quiere ahorrar cierta cantidad de dinero G al final de $H = 4$ períodos de inversión. Inicialmente se dispone de una cantidad B para invertir en cualesquiera de dos tipos de inversiones, acciones $(i = 1)$ y bonos $(i = 2)$ tal que $i \in I$.

El beneficio de cada inversión i en cada período t es aleatorio y es modelado con el parámetro aleatorio discreto ξ_i^t. Por lo tanto, las decisiones de inversión en cada período, x_i^t, son aleatorias y la cantidad final también.

El objetivo es maximizar la esperanza de cierta función de utilidad. Donde exceder la meta G al final del período implica un ingreso de $q\,\%$ por el exceso, mientras que no alcanzarla significa un costo de $r\,\%$ por el déficit.

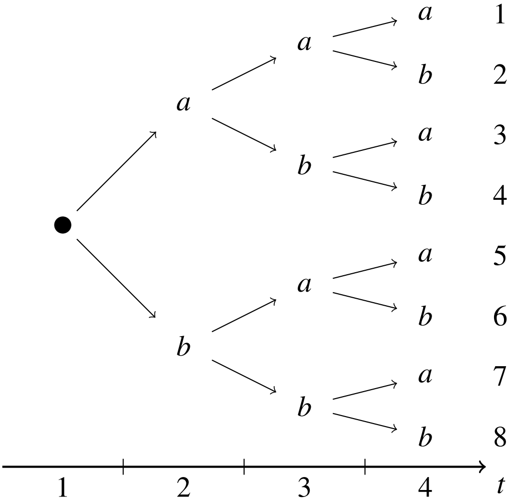
Ej. Planificación financiera
Parámetros y variables

En cada evento de cada período t posterior al primero, hay dos posibles resultados independientes y equiprobables: uno *alto* (a) y otro *bajo* (b) definidos como $s_t \in \{a, b\}$. La secuencia de los resultados hasta el período t se representa como $(s_2, ..., s_t)$. Estos resultados establecen al período final ocho escenarios, identificados por (s_2, s_3, s_4), con sendas probabilidades de $1/8$.

Asociado a los resultados se establece el parámetro aleatorio del retorno de la inversión i en el período t como $\xi_i^t(s_2, ..., s_t)$. Donde sus valores según resultados para acciones son $\xi_1^t(..., a) = 1{,}25$, $\xi_1^t(..., b) = 1{,}06$, y para bonos son $\xi_2^t(..., a) = 1{,}14$, $\xi_2^t(..., b) = 1{,}12$.

La decisión de cada inversión $i \in I$ en $t = 1$, x_i^1, es determinista.
En cambio las decisiones en $t = 2$, $x_i^2(s_2)$, y $t = 3$, $x_i^3(s_2, s_3)$, dependen de las realizaciones del retorno del período.

Ej. Planificación financiera
Árbol de escenarios



Ej. Planificación financiera
Formulación

Se busca maximizar la utilidad esperada, para lo cual se establecen variables de déficit $w(s_2, s_3, s_4)$ y superávit $y(s_2, s_3, s_4)$ con respecto a la meta buscada,

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{s_2,s_3,s_4 \in \{a,b\}} p(s_2,s_3,s_4)(-rw(s_2,s_3,s_4) + qy(s_2,s_3,s_4)) & \\
\text{s.a} & \sum_{i\in I} x_i^1 = B, & (1) \\
 & \sum_{i\in I} \xi_i^2(s_2) x_i^1 = \sum_{i\in I} x_i^2(s_2), \quad s_2 \in \{a,b\}, & (2) \\
 & \sum_{i\in I} \xi_i^3(s_2,s_3) x_i^2(s_2) = \sum_{i\in I} x_i^3(s_2,s_3), \quad s_2,s_3 \in \{a,b\}, & (3) \\
 & \sum_{i\in I} \xi_i^4(s_2,s_3,s_4) x_i^3(s_2,s_3) + w(s_2,s_3,s_4) - y(s_2,s_3,s_4) = G, & \\
 & \qquad s_2,s_3,s_4 \in \{a,b\}, & (4) \\
 & x_i^1, x_i^2(s_2), x_i^3(s_2,s_3), w(s_2,s_3,s_4), y(s_2,s_3,s_4) \geq 0, & \\
 & \qquad i \in I, s_2,s_3,s_4 \in \{a,b\}. &
\end{array}
$$

La primer etapa queda determinada por (1). Las restricciones (2) y (3) establecen el flujo en los períodos 2 y 3, y la restricción (4) establece el déficit o superávit del resultado por escenario con respecto a la meta.

Ej. Planificación financiera
Solución de instancia

Dados valores de $B = 55.000$, $G = 80.000$, recompensa por superávit $q = 1$ y penalidad por déficit $r = 4$.
¿Cuál es la actitud con respecto al riesgo?

El valor óptimo del problema es $RP = -1.514$ y la solución de x es

Período (t)	Resultados	Acción (x_1^t)	Bono (x_2^t)
1	-	41.479	13.521
2	$s_2 = a$	65.095	2.168
2	$s_2 = b$	36.743	22.368
3	$s_2 = a, s_3 = a$	83.840	-
3	$s_2 = a, s_3 = b$	-	71.429
3	$s_2 = b, s_3 = a$	-	71.429
3	$s_2 = b, s_3 = b$	64.000	-

Ej. Planificación financiera

Solución de problema determinista con retorno medio de inversiones

Usando un modelo determinista en el cual los retornos son sustituidos por sus esperanzas (acciones 1,155 y bonos 1,13) da una solución (de valor esperado) que invierte solo en acciones en cada período.

Período (t)	Resultados	Acción (x_1^t)
1	-	55.000
2	$s_2 = a$	68.750
2	$s_2 = b$	58.300
3	$s_2 = a, s_3 = a$	85.938
3	$s_2 = a, s_3 = b$	72.875
3	$s_2 = b, s_3 = a$	72.875
3	$s_2 = b, s_3 = b$	61.798

Aplicar dicha solución para la distribución de eventos aleatorios posibles da el resultado esperado de usar la solución de valor esperado con utilidad $EEV = -3.790$. Entonces el valor de la solución estocástica es
$VSS = RP - EEV = -1.514 - (-3.790) = 2.276$.

Ej. Planificación financiera
Comparación de soluciones de problemas determinista y estocástico

Valor de superávit (y) menos deficit (w) por escenario según soluciones de los problemas:

Escenario	Determinista	Estocástico
(a,a,a)	27.422	24.800
(a,a,b)	11.094	8.870
(a,b,a)	11.094	1.429
(a,b,b)	-2.753	0
(b,a,a)	11.094	1.429
(b,a,b)	-2.753	0
(b,b,a)	-2.753	0
(b,b,b)	-14.494	-12.160

¿Cuál es la probabilidad de lograr la meta?
En el modelo determinista la probabilidad de lograr la meta es 1/2, mientras que en el estocástico esta es 7/8.

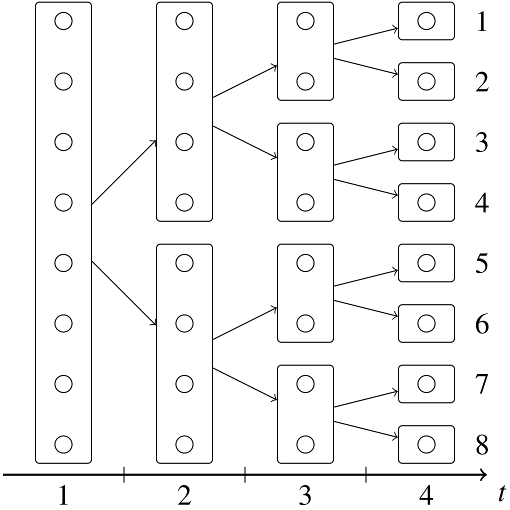
Ej. Planificación financiera
Modelado alternativo con escenarios separados

Considerando solo el horizonte de escenarios, $s \in S = \{1, ..., 8\}$, sin especificar la historia del proceso de decisión, (s_2, s_3, s_4), donde por ej. $s = 1$ corresponde con (a, a, a), $s = 2$ corresponde con (a, a, b), etc.
En esta alternativa se indexan, según escenarios $s \in S$, las probabilidades $p(s)$, los retornos de las inversiones $\xi_i^t(s)$, y las decisiones $x_i^t(s)$.
Esto genera redundancia de representación de $\xi_i^t(s)$ y $x_i^t(s)$.

Dividir los escenarios a lo largo del horizonte de planificación puede hacer perder la no anticipatividad. Por ejemplo podría ocurrir que dados los escenarios distintos s y s' se tenga que $x_i^1(s) \neq x_i^1(s')$.
Los escenarios que corresponden al mismo conjunto de decisiones se agrupan para cada período t y escenario s en S_s^t. Por ejemplo, $S_6^2 = \{5, 6, 7, 8\}$.
Las decisiones deben ser las mismas en el grupo; para lo cual se establecen restricciones de no anticipatividad. Por ejemplo, para S_6^2 se deben establecen las restricciones $x_i^2(5) = x_i^2(6) = x_i^2(7) = x_i^2(8)$.

Ej. Planificación financiera

Árbol de escenarios usando escenarios separados



Ej. Planificación financiera

Formulación con escenarios separados

La formulación para un horizonte de planificación con escenarios separados y restricciones de no anticipatividad es

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{s\in S} p(s)(-rw(s)+qy(s)) & \\
\text{s.a} & \sum_{i\in I} x_i^1(s) = B, \quad s\in S, & (1)\\
 & \sum_{i\in I} \xi_i^t(s) x_i^{t-1}(s) = \sum_{i\in I} x_i^t(s), \quad t=2,\dots,H-1, s\in S, & (2)\\
 & \sum_{i\in I} \xi_i^H(s) x_i^{H-1}(s) + w(s) - y(s) = G, \quad s\in S, & (3)\\
 & x_i^t(s) = x_i^t(s'), \quad t=1,\dots,H-1, i\in I, s\in S, s'\in S_s^t, & (4)\\
 & x_i^t(s), w(s), y(s) \geq 0,\ t=1,\dots,H-1, i\in I, s\in S. &
\end{array}
$$

Las restricciones de balance (2) modelan el flujo para todos los eventos que tienen lugar en los períodos $t = 2, \dots, H-1$.
Las restricciones de balance (3) modelan el flujo al final del horizonte.
Las restricciones de no anticipatividad, (4), son las que vinculan los escenarios. Estas permiten descomponer el problema por escenarios mientras se mantiene la estructura general.

Programa Estocástico de Múltiples Etapas
Formulación General

Sea la secuencia de variables y parámetros aleatorios: x^1, ξ^2, x^2, ..., ξ^H, x^H, se tiene la formulación general

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^1x^1 + \mathbb{E}_{\xi^2}\min[c^2(\omega^2)x^2(\omega^2) + \cdots + \mathbb{E}_{\xi^H}\min[c^H(\omega^H)x^H(\omega^H)]\cdots] \\
\text{s.a} & W^1x^1 = h^1, \\
& T^1(\omega^2)x^1 + W^2x^2(\omega^2) = h^2(\omega^2), \\
& \ldots \\
& T^{H-1}(\omega^H)x^{H-1}(\omega^{H-1}) + W^Hx^H(\omega^H) = h^H(\omega^H), \\
& x^1 \geq 0, x^t(\omega^t) \geq 0, \quad t = 2, ..., H.
\end{array}
$$

Donde los vectores c^1 y h^1, y las matrices W^t son deterministas; y donde $\xi^t(\omega^t) = [c^t(\omega^t), h^t(\omega^t), T^{t-1}_{1.}(\omega^t), ..., T^{t-1}_{m_t.}(\omega^t)]$ es un vector aleatorio definido en $(\Omega, \mathcal{A}^t, P)$, con $\mathcal{A}^t \subset \mathcal{A}^{t+1}$, $t = 2, ..., H$ y soporte Ξ^t.
Donde las decisiones $x^t(\omega^t)$ dependen de la historia hasta el período t.

Programa Estocástico de Múltiples Etapas

Formulación por etapas

Como problema dinámico en las etapas $t = 1, ..., H$ y estados $x^t(\omega^t)$, con condición final

$$Q^H(x^{H-1}, \xi^H(\omega)) = \begin{array}{ll} \min & c^H(\omega)x^H(\omega) \\ \text{s.a} & W^H x^H(\omega) = h^H(\omega) - T^{H-1}(\omega)x^{H-1}, \\ & x^H(\omega) \geq 0. \end{array}$$

Donde $\mathcal{Q}^{t+1}(x^t) = \mathbb{E}_{\xi^{t+1}}[Q^{t+1}(x^t, \xi^{t+1}(\omega))]$ implica para $t = 2, ..., H-1$,

$$Q^t(x^{t-1}, \xi^t(\omega)) = \begin{array}{ll} \min & c^t(\omega^t)x^t(\omega) + \mathcal{Q}^{t+1}(x^t) \\ \text{s.a} & W^t x^t(\omega) = h^t(\omega) - T^{t-1}(\omega)x^{t-1}, \\ & x^t(\omega) \geq 0. \end{array}$$

Finalmente

$$\begin{array}{ll} \min & c^1 x^1 + \mathcal{Q}^2(x^1) \\ \text{s.a} & W^1 x^1 = h^1, \\ & x^1 \geq 0. \end{array}$$

Programa Estocástico de Múltiples Etapas
Propiedad

Sean las regiones factibles de los problemas de cada etapa
$K^t = \{x^t \mid \mathcal{Q}^{t+1}(x^t) < \infty\}$,

Teorema (8)

Los conjuntos K^t y las funciones $\mathcal{Q}^{t+1}(x^t)$ son convexos para $t = 1, ..., H-1$; además, si Ξ^t es finito para $t = 1, ..., H$, entonces K^t y $\mathcal{Q}^{t+1}(x^t)$ son poliédricos.

Esta propiedad permite el uso de procedimientos de descomposición de los problemas.

Programa Estocástico de Múltiples Etapas

Recurso separable en bloques

Un problema estocástico múltiple etapa tiene *recurso separable en bloques* si para todo $t = 1, ..., H$ y para todo ω los vectores de decisión $x^t(\omega)$ pueden rescribirse como $x^t(\omega) = [w^t(\omega), y^t(\omega)]$, donde $w^t(\omega)$ y $y^t(\omega)$ representan decisiones agregadas y detalladas, respectivamente.

Además, las restricciones cumplen:

1. En el objetivo, la etapa t cumple $c^t x^t(\omega) = r^t w^t(\omega) + q^t y^t(\omega)$
2. La matriz de recurso es diagonal en bloques
$$W^t = \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix}.$$
3. Para cada realización de ω,
$$T^t(\omega) = \begin{pmatrix} R^t(\omega) & 0 \\ S^t(\omega) & 0 \end{pmatrix}, \quad h^t(\omega) = \begin{pmatrix} b^t(\omega) \\ d^t(\omega) \end{pmatrix},$$
donde los componentes nulos de T^t corresponden a variables detalladas.

Programa Estocástico de Múltiples Etapas

Propiedades del recurso separable en bloques

Las variables detalladas no afectan las futuras decisiones.
Entonces se puede abreviar $Q^t(x^{t-1}, \xi^t(\omega))$ como la suma $Q^t_w(w^{t-1}, \xi^t(\omega)) + Q^t_y(w^{t-1}, \xi^t(\omega))$, donde no es necesario incluir términos y^{t-1} en x^{t-1}, y

$$
\begin{aligned}
Q^t_w(w^{t-1}, \xi^t(\omega)) = \quad \min \quad & r^t(\omega)w^t(\omega) + \mathcal{Q}^{t+1}(x^t) \\
\text{s.a} \quad & A^t w^t(\omega) = b^t(\omega) - R^{t-1}(\omega)w^{t-1}, \\
& w^t(\omega) \geq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^t_y(w^{t-1}, \xi^t(\omega)) = \quad \min \quad & q^t(\omega)y^t(\omega) \\
\text{s.a} \quad & B^t y^t(\omega) = d^t(\omega) - S^{t-1}(\omega)w^{t-1}, \\
& y^t(\omega) \geq 0,
\end{aligned}
$$

La separabilidad en bloques permite no considerar el anidamiento de las decisiones detalladas. Por lo tanto, las variables w pueden redefinirse como decisiones agregadas de primer etapa. Y la segunda etapa esta solo compuesta por decisiones detalladas.