Práctico 2

Lógica Proposicional

Ejercicio 1

Demuestre que:

a. $(((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \in \mathtt{PROP}$.
b. $((p_7 \to (\neg \bot)) \leftrightarrow ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \to p_1)) \in \mathtt{PROP}$.
c. $((\to\ \notin \mathtt{PROP}$.

Ejercicio 2

a. Dibuje los árboles de las proposiciones del Ejercicio 1.
b. Determine a qué proposiciones corresponden los árboles de la Figura 1.

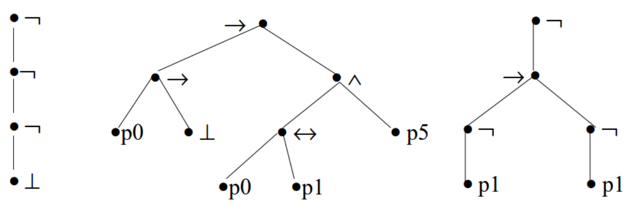


Figura 1: Árboles de proposiciones del Ejercicio 2.

Ejercicio 3

a. Dé por lo menos dos *secuencias de formación* de largo diferente para cada una de las proposiciones del Ejercicio 1.
b. Dé por lo menos dos secuencias de formación diferentes de largo mínimo para:
$((((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2) \to p_1)$.

Ejercicio 4

Sea la siguiente propiedad:
Para toda φ subfórmula de ψ, φ ocurre en cualquier secuencia de formación para ψ.
Dé una prueba inductiva de la misma.

Ejercicio 5

a. Enumere todas las subfórmulas de las proposiciones del Ejercicio 2.
b. Defina la función $sub : \mathtt{PROP} \to 2^{\mathtt{PROP}}$, que a cada proposición φ le asigna el conjunto de sus subfórmulas.
c. Demuestre que la relación “ser subfórmula de” es transitiva.

Ejercicio 6

Una relación binaria entre dos conjuntos A y B puede entenderse como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. En particular la relación *subfórmula* la podemos definir como un conjunto de pares de fórmulas:

- $\text{SUBF} \subseteq \mathtt{PROP} \times \mathtt{PROP}$
- $\text{SUBF} = \{\langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \text{ es subfórmula de } \psi\}$

a. Escribir una definición inductiva del conjunto SUBF.
b. Formular el PIP correspondiente a la definición anterior.
c. Demostrar por inducción en SUBF la propiedad dada en el ejercicio 4.

Ejercicio 7

a. Considere una secuencia de formación de ψ en la que ocurren fórmulas que no son subfórmulas de ψ: $\varphi_1, ..., \varphi_n \equiv \psi$ de la fórmula ψ. Sea φ_i la fórmula de la secuencia que no es subfórmula de ψ, y que aparece más a la derecha en la secuencia. Pruebe que si elimina φ_i de la secuencia de formación dada, la secuencia resultante sigue siendo una secuencia de formación para ψ.
b. A partir del resultado anterior, demuestre que si φ ocurre en una secuencia de formación de largo mínimo para ψ entonces φ es una subfórmula de ψ.

Ejercicio 8

a. Defina una *función de rango* $r : \mathtt{PROP} \to \mathbb{N}$ que dada una fórmula proposicional calcula la altura del árbol asociado a esa fórmula. Ejemplo $r(p_i) = 0$
Calcule el rango de las proposiciones del Ejercicio 1.
b. Defina una función $con : \mathtt{PROP} \to \mathbb{N}$ tal que $con(\varphi)$ denota la cantidad de ocurrencias de conectivos en la fórmula φ.
Calcule *con* para las proposiciones del Ejercicio 1.
c. Indique cual de las siguientes afirmaciones es correcta y cuál no, y en cada caso justifique su respuesta mediante la demostración:
   I. Para toda fórmula φ, $r(\varphi) \geq con(\varphi)$.
   II. Para toda fórmula φ, $r(\varphi) < con(\varphi)$.
   III. Para toda fórmula φ, $r(\varphi) \leq con(\varphi)$.

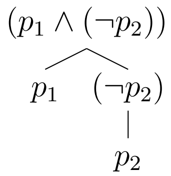
Ejercicio 9

Sea el conjunto $\mathcal{T}(\texttt{PROP})$ de los árboles etiquetados con elementos de $\texttt{PROP}$ y la función:

$$ARBOL : \texttt{PROP} \to \mathcal{T}(\texttt{PROP})$$

que asocia cada proposición de $\texttt{PROP}$ con su árbol.

Por ejemplo, $ARBOL((p_1 \wedge (\neg p_2)))$ es:



a. Defina una función $CantAt : \texttt{PROP} \to \mathbb{N}$ tal que $CantAt(\varphi)$ sea la cantidad de átomos que ocurren en φ.

   Por ejemplo, $CantAt((p_1 \wedge (\neg p_2))) = 2$

b. Defina la función $CantNodos : \mathcal{T}(\texttt{PROP}) \to \mathbb{N}$ tal que $CantNodos(ARBOL(\varphi))$ sea la cantidad de nodos del árbol de φ.

   Por ejemplo, $CantNodos(ARBOL((p_1 \wedge (\neg p_2)))) = 4$

c. Considere la función *sub* del Ejercicio 5. Demuestre que $|sub(\varphi)| \leq CantNodos(ARBOL(\varphi))$.

Ejercicio 10

En este ejercicio usamos las funciones *con* y r del Ejercicio 8 y las funciones *CantNodos* y *CantAt* del Ejercicio 9.

a. Defina inductivamente el lenguaje $\texttt{PROP1}$ incluído en $\texttt{PROP}$ tal que $\bot$ no aparece en ninguna palabra de $\texttt{PROP1}$.

b. Demuestre que, si $\varphi \in \texttt{PROP1}$, la cantidad de conectivos en φ **más** la cantidad de átomos de φ es igual a la cantidad de nodos de $ARBOL(\varphi)$.

c. Dada $\varphi \in \texttt{PROP1}$, demuestre que la cantidad de conectivos en φ **más** la cantidad de átomos de φ es menor o igual que $2^{r(\varphi)+1} - 1$.

Ejercicio 11

a. Defina inductivamente el lenguaje `PROP'` con alfabeto $\{p_0, p_1, \neg, \rightarrow,), (\}$, de forma que sea un subconjunto de `PROP`.

b. Considere la siguiente definición inductiva del lenguaje `POSF`:

   I. $p_0 \in$ `POSF`
   II. $p_1 \in$ `POSF`
   III. Si $\varphi \in$ `POSF`, entonces $\varphi\neg \ \in$ `POSF`
   IV. Si $\varphi \in$ `POSF` y $\psi \in$ `POSF`, entonces $\varphi\ \psi \rightarrow\ \in$ `POSF`

   Defina utilizando el esquema de recursión primitiva que corresponda una función invertible
   f : `POSF` $\rightarrow$ `PROP'` y su función inversa f^{-1} : `PROP'` $\rightarrow$ `POSF`.

   La función f debe convertir una palabra de `POSF` en una fórmula proposicional con la misma cantidad de ocurrencias de cada letra proposicional y de cada conectivo. Por ejemplo:

$$f(p_0\neg\ p_0\ p_1 \rightarrow \rightarrow) = ((\neg p_0) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_1))$$

c. Defina utilizando el esquema de recursión primitiva que corresponda otra función invertible
   g : `POSF` $\rightarrow$ `PROP'` (distinta de la anterior) y su inversa g^{-1} : `PROP'` $\rightarrow$ `POSF`.

   La función g también debe convertir una palabra de `POSF` en una fórmula proposicional con la misma cantidad de ocurrencias de cada letra proposicional y de cada conectivo. Por ejemplo:

$$g(p_0\neg\ p_0\ p_1 \rightarrow \rightarrow) = ((p_1 \rightarrow p_0) \rightarrow (\neg p_0))$$

d. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{POSF}) f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$.

e. Utilizando la parte anterior, demuestre que para todo φ y ψ en `POSF`, $f(\varphi) = g(\psi)$ si y sólo si $f(\psi) = g(\varphi)$.

Ejercicio 12

a. Calcule:

   I. $((p_1 \wedge p_0) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_3))[((\neg p_0) \rightarrow p_3)/p_0]$
   II. $((p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \rightarrow (\neg p_0)))[((\neg p_0) \rightarrow p_3)/p_0]$
   III. $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_0))[(p_0 \wedge (\neg p_1))/p_0][(\neg p_2)/p_0]$

b. Encuentre una sustitución tal que el resultado de aplicar la sustitución a

$$((\neg p_1) \leftrightarrow ((\neg p_0) \wedge (p_0 \rightarrow p_1)))$$

   es

$$((\neg(p_0 \rightarrow p_1)) \leftrightarrow ((\neg p_0) \wedge (p_0 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_1))))$$

Ejercicio 13

Para cada una de las siguientes fórmulas escriba una abreviatura o indique a qué fórmula de `PROP` abrevia.

a. $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5$
b. $p_1 \to p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \to p_5$
c. $((p_1 \vee p_2) \to p_3)$
d. $p_1 \to p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$
e. $((p_1 \to p_2) \wedge (p_3 \wedge p_4))$
f. $((\neg(p_1 \vee p_2)) \to p_3)$

Ejercicio 14

Según la ley 1865, todo mal ciudadano debe pagar una multa de 20 pesos al municipio. Para saber si una persona es mal ciudadano, hay un edicto que dice lo siguiente: *Son malos ciudadanos las personas que*

- *tiran basura a la calle*
- *ven una casa incendiándose y no avisan inmediatamente a los bomberos*

Formalice en `PROP` los siguientes enunciados y determine si Ud. debe pagar los 20 pesos en cada caso.

I. Ud. va paseando por la calle, compra un chocolate y tira el papel en el contenedor de la esquina.
II. Ud ve una casa incendiándose, tira su cigarrillo al suelo y avisa de inmediato a los bomberos.
III. Ud. va a tirar la basura al contenedor y ve que el mismo se está inciendiando, tira la basura dentro del contenedor en llamas y se va a trabajar.