

Lógica proposicional

Lógica

Lógica

- Disciplina matemática
- Disciplina formal: se razona sobre la forma de lo escrito
- Se estudia el razonamiento, y no las verdades contingentes
- Se estudia la noción de consecuencia
*Si A es verdadero,
entonces B es verdadero.*

Los silogismos del Bercho

- Todos los perros ladran
- Bercho es un perro
- *Luego*, Bercho ladra

- Todos los gatos ladran
- Tolomeo es un gato
- *Luego*, Tolomeo ladra

- Todos los perros ladran
- Bercho no es un gato
- *Luego*, Bercho ladra

- Todos los P son L
- B es un P
- *Luego*, B es un L

Reglas del club escocés

1. Todo miembro no escocés deberá usar medias rojas.
2. Todo miembro que use medias rojas deberá usar un kilt.
3. Los miembros casados no podrán salir los sábados.
4. Los miembros saldrán los sábados si y sólo si son escoceses.
5. Todo miembro que use kilt deberá ser escocés y casado.
6. Todo miembro escocés deberá usar kilt.

Concluyendo cosas a partir de las reglas

Usted fue recientemente contratado como portero del club y llega una persona a la puerta. ¿Bajo qué condiciones lo dejaría pasar?

- ¿Puede entrar al club un escocés?
- ¿Puede entrar al club un uruguayo?
- ¿Puede entrar al club alguien que no tiene la vacuna antitetánica?

Una mano al portero

Situación A: viene alguien que no es escocés

1. no usa kilt (regla 5, A)
2. no usa medias rojas (regla 2, 1)
3. *pero debe* ser escocés (regla 1, 2)

Situación B: viene algún escocés

1. usa kilt (regla 6, B)
2. está casado (regla 5, 1)
3. no sale los sábados (regla 3, 2)
4. *pero debe* salir los sábados (regla 4, B)

Proposiciones

Proposición

Una oración de la cual se puede decir que es verdadera o falsa.

Proposiciones simples

- Ayer llovió en Paysandú.
- El Sol gira alrededor de la Tierra.
- $2 \times 3 = 3 + 3$
- 3 es primo.
- El sucesor de 3 es primo.

Proposiciones compuestas

- *Si* ayer llovió en Paysandú, *entonces* el Sol gira alrededor de la Tierra.
- El Sol gira alrededor de la Tierra o la Tierra gira alrededor del Sol.
- $2 \times 3 = 6$ y 6 es impar.
- 3 *no* es primo.
- *Hay* un número natural que es par y es primo.
- *Todo* entero par mayor que cuatro es la suma de dos números primos.

Validez de un razonamiento

Queremos saber si cierta conclusión (una proposición) se desprende de un conjunto de hipótesis (proposiciones).

Razonamiento válido

Siempre que las hipótesis son verdaderas, la conclusión también lo es.

Razonamiento inválido

Es posible obtener conclusiones falsas a partir de hipótesis verdaderas.

Dos enfoques para analizar un razonamiento

Semántico

Investiga si la *verdad* de las hipótesis implica la verdad de la conclusión.

Prueba

Investiga la existencia de un objeto formal que encadene las hipótesis con la conclusión usando otras proposiciones.

Traducción a PROP

Las proposiciones simples se traducen como letras de proposición (elementos de P).

- Ayer llovió en Paysandú. _____ p_0
- El Sol gira alrededor de la Tierra. _____ p_1
- $2 \times 3 = 6$ _____ p_2
- 6 es primo. _____ p_3
- El sucesor de 3 es primo. _____ p_4

Traducción a PROPOSICIONES

Las proposiciones compuestas se traducen usando los conectivos.

- Si ayer llovió en Paysandú, entonces el Sol gira alrededor de la Tierra. _____($p_0 \rightarrow p_1$)
- $2 \times 3 = 6$ y 6 es primo. _____($p_2 \wedge p_3$)
- 6 *no* es primo. _____($\neg p_3$)

Traducción a PROP

Algunas proposiciones no tienen una buena traducción a PROP.

- *Hay* un número natural que es par y primo.
- *Todo* entero par mayor que cuatro es la suma de dos números primos.

Más adelante usaremos un lenguaje más expresivo para tratar estos casos

Lógica proposicional

Plan

1. Sintaxis. El conjunto inductivo PROP, sustitución.
2. Semántica. Valores de verdad, valuaciones, equivalencia de proposiciones, consecuencia lógica, tautologías.
3. Pruebas. Deducción natural, derivación, consecuencia sintáctica, teorema.
4. Metateoría. Consistencia y completitud.