Optimización bajo Incertidumbre
1. Introducción

Carlos Testuri – Germán Ferrari

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2003-2022

Contenido

1. Motivación
2. Modelado y optimización
3. Objetivo
4. Ejemplo Producción agrícola
5. Ejemplo “Canilla”

Incertidumbre

- ¿Qué es la incertidumbre?
- ¿Cómo se manifiesta?
- ¿Cómo puede representarse?

Problemas de decisión con incertidumbre

- La incertidumbre es relevante en muchos problemas de decisión
- Esta se manifiesta hacia el futuro y se revela, con el paso del tiempo, en el presente
- Las entidades de un problema (datos, decisiones, objetivo, etc.) pueden depender de eventos aleatorios que la representan
- El modelado del problema conlleva la abstracción de sus propiedades en conjunto con la representación de los eventos aleatorios y su evolución temporal

Modelado de problemas con incertidumbre

- A menudo la incertidumbre en los problemas se la encapsula en modelos deterministas (sin representación de la aleatoriedad)
- Los modelos deterministas no permiten representar la dinámica de la evolución temporal de la incertidumbre
- La optimización bajo incertidumbre (programación estocástica) constituye un esquema adecuado para modelar la incertidumbre dado que permite valorar las decisiones tomadas luego de que la incertidumbre es revelada
- Los desafíos de modelar y resolver problemas mediante programación estocástica son mayores que mediante programación determinista.

Resolución mediante modelos

Los modelos permiten la comprensión y la resolución de problemas. Implican abstracciones que reflejan interacciones relevantes de las entidades del problema, donde la simplificación

- *insuficiente* implica costos extras o incapacidad de resolución, y
- *excesiva* provoca inviabilidad debido a falta de realismo.

El proceso de modelado conlleva ciertas etapas:

- comprensión del problema,
- formulación (simbólica) de modelo del problema,
- resolución (computacional) del modelo, e
- interpretación y validación de resultados del modelo según el problema.

Optimización

Análisis y solución de problemas en los cuales se determina una decisión óptima entre un conjunto factible. La decisión es la mejor según cierto objetivo a minimizar o maximizar.

- Analizar propiedades de un problema
- Formular modelos del problema
- Desarrollar y aplicar algoritmos de resolución a los modelos
- Interpretar y validar resultados de modelos según el problema.

Componentes de modelos algebraicos

En optimización se utilizan modelos algebraicos de los problemas, compuestos por

- parámetros (datos),
- variables (decisiones),
- conjunto factible de decisiones (mediante restricciones, etc.), y
- objetivo (extremo de una función de las decisiones).

Objetivo

Introducir al modelado de la incertidumbre en problemas de optimización, evaluando los beneficios, desventajas y desafíos de la metodología.

- Representar la incertidumbre con eventos aleatorios y funciones de distribución
- Analizar la evolución de los eventos y estructurar la dinámica de la información en los problemas
- Modelar los problemas mediante programación matemática (optimización) en consistencia con la dinámica de la información
- Resolver los modelos y valorar sus soluciones mediante métricas
- Capacitar en técnicas generales y en algunas aplicaciones.

Producción agrícola – Problema

Un productor debe decidir, anualmente, las cantidades a plantar de ciertos cultivos y, dependiendo de los rendimientos, las cantidades a vender o comprar de forma tal de maximizar su ingreso total mientras cumple ciertos requisitos

	Trigo	Maíz	Remolacha
Rendimiento (T/ha)	2,5	3	20
Costo plantar ($/ha)	150	230	260
Precio venta ($/T)	170	150	36 ($<$ 6000 T)
			10 ($>$ 6000 T)
Precio compra ($/T)	238	210	
Requisito mín. (T)	200	240	
Tierra disponible (ha)		500	

Producción agrícola – Modelo

Variables

x_T, x_M, x_R : superficie de tierra dedicada a trigo, maíz, y remolacha,
y_T^v, y_T^c : cantidades de trigo vendido y comprado,
y_M^v, y_M^c : cantidades de maíz vendido y comprado, y
y_R^f, y_R^v : cantidades de remolacha vendida a precios favorable y bajo

Formulación

$$
\begin{array}{ll}
\min & 150x_T + 230x_M + 260x_R \\
 & +238y_T^c - 170y_T^v + 210y_M^c - 150y_M^v - 36y_R^f - 10y_R^v \\
\text{s.a} & x_T + x_M + x_R \leq 500, \\
 & 2,5x_T + y_T^c - y_T^v \geq 200, \\
 & 3x_M + y_M^c - y_M^v \geq 240, \\
 & 20x_R - y_R^f - y_R^v \geq 0, \\
 & y_R^f \leq 6000, \\
 & x_T, x_M, x_R, y_T^v, y_T^c, y_M^v, y_M^c, y_R^f, y_R^v \geq 0.
\end{array}
$$

Producción agrícola – Solución

Resumen de solución:

	Trigo	Maíz	Remolacha
Superficie (ha)	120	80	300
Producido (T)	300	240	6000
Ventas (T)	100		6000
Compras (T)			
Beneficio ($)		118.600	

Sin embargo, los rendimientos dependen de las condiciones climáticas.

Producción agrícola – Incertidumbre

Los rendimientos varían un 20% alrededor de los valores medios.
Se plantean tres escenarios con rendimientos correlacionados:

Escenarios	Trigo	Maíz	Remolacha
Bueno (+20%)	3	3,6	24
Medio	2,5	3	20
Malo (–20%)	2	2,4	16

Producción agrícola – Soluciones según escenarios

Resumen de las soluciones independientes según escenario:

	Bueno (+20%)			Medio			Malo (-20%)		
	Trigo	Maíz	Remo.	Trigo	Maíz	Remo.	Trigo	Maíz	Remo.
Superficie (ha)	183	67	250	120	80	300	100	25	375
Producido (T)	550	240	6000	300	240	6000	200	60	6000
Ventas (T)	350		6000	100		6000			6000
Compras (T)								180	
Beneficio ($)	167.667			118.600			59.950		

El modelo es sensible a los cambios en rendimientos.

¿Qué decisión tomar?
¿Cómo contemplar todos los escenarios?

Producción agrícola – Decisiones y etapas

Se pueden clasificar las decisiones según:

- decisiones de asignación de tierra: x_T, x_M, x_R
- decisiones en compras y ventas: $y_T^v, y_T^c, y_M^v, y_M^c, y_R^f, y_R^v$

Se tiene la secuencia temporal de las decisiones según etapas:

- decisiones de *primer-etapa*: asignación de tierra,
- un evento aleatorio (clima) que determina los rendimientos, y
- decisiones de *segunda-etapa*: compras y ventas.

Producción agrícola – Modelo estocástico (Formulación extensiva)

Dados tres escenarios equiprobables, $s = 1, 2, 3$, correspondientes a los escenarios *bueno*, *medio* y *malo*, respectivamente.
Variables de compras y ventas por escenario: $y^v_{Ts}, y^c_{Ts}, y^v_{Ms}, y^c_{Ms}, y^f_{Rs}, y^v_{Rs}$

$$\min \quad 150x_T + 230x_M + 260x_R + \sum_{s=1,2,3} \frac{1}{3}(238y^c_{Ts} - 170y^v_{Ts} + 210y^c_{Ms} - 150y^v_{Ms} - 36y^f_{Rs} - 10y^v_{Rs})$$

$$\text{s.a} \quad x_T + x_M + x_R \leq 500, \qquad x_T, x_M, x_R \geq 0,$$

$$\begin{array}{lll}
3x_T + y^c_{T1} - y^v_{T1} \geq 200, & 2,5x_T + y^c_{T2} - y^v_{T2} \geq 200, & 2x_T + y^c_{T3} - y^v_{T3} \geq 200, \\
3,6x_M + y^c_{M1} - y^v_{M1} \geq 240, & 3x_M + y^c_{M2} - y^v_{M2} \geq 240, & 2,4x_M + y^c_{M3} - y^v_{M3} \geq 240, \\
24x_R - y^f_{R1} - y^v_{R1} \geq 0, & 20x_R - y^f_{R2} - y^v_{R2} \geq 0, & 16x_R - y^f_{R3} - y^v_{R3} \geq 0, \\
y^f_{R1} \leq 6000, & y^f_{R2} \leq 6000, & y^f_{R3} \leq 6000, \\
y^v_{T1}, y^c_{T1}, y^v_{M1}, y^c_{M1}, y^f_{R1}, y^v_{R1} \geq 0, & y^v_{T2}, y^c_{T2}, y^v_{M2}, y^c_{M2}, y^f_{Rs}, y^v_{R2} \geq 0, & y^v_{T3}, y^c_{T3}, y^v_{M3}, y^c_{M3}, y^f_{R3}, y^v_{R3} \geq 0
\end{array}$$

Producción agrícola – Solución estocástica

		Trigo	*Maíz*	*Remolacha*
Primer etapa	Superficie (ha)	170	80	250
Segunda etapa				
Bueno (s=1)	Producción (T)	510	288	6000
	Ventas (T)	310	48	6000 (favor.)
	Compras (T)			
Medio (s=2)	Producción (T)	425	240	5000
	Ventas (T)	225		5000 (favor.)
	Compras (T)			
Malo (s=3)	Producción (T)	340	192	4000
	Ventas (T)	140		4000 (favor.)
	Compras (T)		48	
Beneficio esperado ($) 108.390				

Producción agrícola – Valor de información perfecta

Si se conociera perfectamente el clima, el beneficio esperado en el largo plazo es $\frac{1}{3}$ (167.667 + 118.600 + 59.950) = \$115.406 por año, denominado *esperar y ver* (WS).

Realmente, lo mejor que se puede obtener es la *solución estocástica* (RP), con un beneficio esperado de \$108.390 por año.

La diferencia: WS – RP = \$7.016, se denomina *valor esperado de la información perfecta* (EVPI).

Producción agrícola – Valor de solución estocástica

Asignar la tierra según retornos medios, $x_T = 120$, $x_M = 80$, $x_R = 300$, resulta en un beneficio esperado de \$107.240 por año, denominado *esperanza de aplicar la solución de valor esperado* (EEV).

La diferencia entre la solución estocástica y la esperanza de aplicar la solución de valor esperado, RP – EEV = 108.390 – 107.240 = \$1.150 por año, se denomina *valor de la solución estocástica* (VSS).

Producción agrícola – Subproblema de segunda etapa

Se define $t_i(s)$ como el rendimiento del cultivo $i \in \{T, M, R\}$ en el escenario $s = 1, 2, 3$. Sea $t(s) := [t_T(s), t_M(s), t_R(s)]$ su agrupamiento.

Para una decisión de primer etapa $x := [x_T, x_M, x_R]$ y un escenario s se define el problema paramétrico

$$
\begin{array}{rll}
Q(x, t(s)) := & \min & 238y_T^c - 170y_T^v + 210y_M^c - 150y_M^v - 36y_R^f - 10y_R^v \\
& \text{s.a} & t_T(s)x_T + y_T^c - y_T^v \geq 200, \\
& & t_M(s)x_M + y_M^c - y_M^v \geq 240, \\
& & t_R(s)x_R - y_R^f - y_R^v \geq 0, \\
& & y_R^f \leq 6000, \\
& & y_T^v, y_T^c, y_M^v, y_M^c, y_R^f, y_R^v \geq 0,
\end{array}
$$

denominado subproblema de segunda etapa.

Producción agrícola – Formulación implícita

Dados la variable de decisión de primer etapa, x, y el parámetro aleatorio, t, que representa los retornos de los tres escenarios, se tiene la formulación implícita del problema

$$\begin{array}{ll} \min & 150x_T + 230x_M + 260x_R + \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3} Q(x, t(s)) \\ \text{s.a} & x_T + x_M + x_R \leq 500, \\ & x_T, x_M, x_R \geq 0. \end{array}$$

Donde se define como *función de recurso o valor* a

$$\mathcal{Q}(x) := \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{3} Q(x, t(s)) = \mathbb{E}_t Q(x, t).$$

Producción agrícola – Parámetro aleatorio continuo

Sea una variación del problema de producción agrícola en la que los rendimientos de los cultivos son variables aleatorias uniformes e independientes: $t_i \sim U[l_i, u_i]$, $i \in \{T, M, R\}$, cuyos rangos y medias coinciden con los valores de los escenarios discretos anteriores.

Debido a la independencia del parámetro aleatorio, $t = [t_T, t_M, t_R]$, la función de recurso puede separarse según cultivos, $\mathbb{E}_t Q(x,t) = \sum_{i\in\{T,M,R\}} \mathbb{E}_t Q_i(x_i, t)$, donde $Q_i(x_i, t)$ es el valor de la segunda etapa del cultivo i.

Entonces el problema original es equivalente a

$$\begin{array}{ll} \min & 150x_T + 230x_M + 260x_R + \sum_{i\in\{T,M,R\}} \mathbb{E}_t Q_i(x_i, t) \\ \text{s.a} & x_T + x_M + x_R \leq 500, \\ & x_T, x_M, x_R \geq 0; \end{array}$$

Para resolverlo hay que obtener expresiones analíticas de $\mathbb{E}_t Q_i(x_i, t)$.

Producción agrícola – Expresión analítica de $E_t Q(x,t)$

Para el caso $i = R$ se tiene el subproblema

$$\begin{array}{rll} Q_R(x_R,t) = & \min & -36y_R^f(t) - 10y_R^v(t) \\ & \text{s.a} & \\ & & t_R x_R - y_R^f(t) - y_R^v(t) \geq 0, \\ & & y_R^f(t) \leq 6000, \\ & & y_R^f(t), y_R^v(t) \geq 0. \end{array}$$

La solución del subproblema cumple que
$y_R^{*f}(t) = \min\{6000, t_R x_R\}$,
$y_R^{*v}(t) = \max\{t_R x_R - 6000, 0\}$.

Por lo cual se tiene
$Q_R(x_R,t) = -36 \cdot \min\{6000, t_R x_R\} - 10 \cdot \max\{t_R x_R - 6000, 0\}$.

Producción agrícola – Expresión analítica de $E_tQ(x,t)(2)$

$\mathbb{E}_t Q_R(x_R,t)$ se calcula en tramos según la realización de los límites de los rendimientos inferior, $l_R x_R$, y superior, $u_R x_R$, con respecto a la cuota de 6000.

Para el tramo $6000 \leq l_R x_R$ se tiene que

$$y_R^{*f}(t) = 6000 \quad \text{y} \quad y_R^{*v}(t) = t_R x_R - 6000 \text{ con } t_R \in U[l_R, u_R];$$

por lo que $\mathbb{E}_t Q_R(x_R,t) = -36(6000) - 10\int_{l_R}^{u_R} (\tau x_R - 6000)(\frac{1}{u_R - l_R}) d\tau$.

Finalmente para todos los tramos se tiene

$$\mathbb{E}_t Q_R(x_R,t) = \begin{cases} -156000 - 10\bar{t_R} x_R & \text{si} \quad 6000 \leq l_R x_R, \\ -36\bar{t_R} x_R + \frac{13(u_R x_R - 6000)^2}{x_r(u_R - l_R)} & \text{si} \quad l_R x_R \leq 6000 \leq u_R x_R, \\ -36\bar{t_R} x_R & \text{si} \quad u_R x_R \leq 6000. \end{cases}$$

Producción agrícola – Solución para parámetro aleatorio continuo

Dado que la función de recurso es convexa, continua y diferenciable, el objetivo de primer etapa es lineal, y el problema es convexo, entonces las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) son necesarias y suficientes para un óptimo global de

$$\begin{array}{ll} \min & 150x_T + 230x_M + 260x_R + \sum_{i\in\{T,M,R\}} \mathbb{E}_t Q_i(x_i, t) \\ \text{s.a} & x_T + x_M + x_R \leq 500, \\ & x_T, x_M, x_R \geq 0. \end{array}$$

Aplicando las condiciones KKT, con el multiplicador λ para la restricción de tierra, y resolviendo el sistema la solución es

$$x_T = 136, x_M = 85, x_R = 279, \lambda = 275.$$

Problema “Canilla”

Un vendedor de diarios puede comprar a su distribuidor hasta u diarios a precio c por unidad.

Vende los diarios a sus clientes a precio q, y puede devolver al distribuidor los diarios sobrantes a precio de retorno r, tal que $0 < r < c < q$.

La demanda de diarios varía diariamente, y es modelada según la variable aleatoria ξ con distribución (acumulada) $F(\xi)$.

Debe decidir cuantos diarios comprar, x, al distribuidor de forma de maximizar su beneficio.

“Canilla” – Beneficio

El beneficio se define en función de la compra y la demanda según

$$g(x,\xi) := \begin{cases} (q-c)x, & \text{si} \quad x \le \xi \\ (r-c)x + (q-r)\xi, & \text{si} \quad x > \xi. \end{cases}$$

Es una función lineal a trozos continua con pendiente positiva $(q-c)$ si $x \le \xi$ y pendiente negativa $(r-c)$, si $x > \xi$.

Si la demanda es conocida, entonces la decisión óptima es $x^* = \xi$.

“Canilla” – Beneficio esperado

Según la ley de los grandes números el beneficio esperado a lo largo del tiempo tiende al valor esperado

$$\mathbb{E}[\,g(x,\xi)] = \int g(x,\xi)dF(\xi).$$

[Notar que la función de densidad de probabilidad de ξ es $\frac{dF(\xi)}{d\xi}$.]

Se busca maximizar dicho beneficio esperado

$$\max_{0\le x\le u}\ \mathbb{E}[\,g(x,\xi)].$$

“Canilla” – Modelo

x : cantidad de diarios comprados,
$y(\xi)$: cantidad de diarios vendidos, y
$w(\xi)$: cantidades de diarios retornados.

$$\begin{array}{cl} \min & cx + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.a} & 0 \leq x \leq u. \end{array}$$

Donde $\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_\xi Q(x,\xi)$ y

$$Q(x,\xi) = \begin{array}{cl} \min & -qy(\xi) - rw(\xi) \\ \text{s.a} & y(\xi) \leq \xi, \\ & y(\xi) + w(\xi) \leq x, \\ & y(\xi), w(\xi) \geq 0. \end{array}$$

“Canilla” – Propiedades de la solución

La solución cumple que $y^*(\xi) = \min\{\xi, x\}$, y $w^*(\xi) = \max\{x - \xi, 0\}$.

La función de valor esperado de segunda etapa,

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_\xi[-q \cdot \min\{\xi, x\} - r \cdot \max\{x - \xi, 0\}],$$

es convexa y continua; además, diferenciable cuando ξ es una variable aleatoria continua.

Entonces, aplicando condiciones necesarias óptimas,

$$[cx + \mathcal{Q}(x)]' = c + \mathcal{Q}'(x) = 0,$$

la solución sería

$$\begin{cases} x^* = 0, & \text{si} \quad c + \mathcal{Q}'(0) > 0, \\ x^* = u, & \text{si} \quad c + \mathcal{Q}'(u) < 0, \\ \text{una solución de } c + \mathcal{Q}'(x) = 0, & \text{o/c.} \end{cases}$$

“Canilla” – Resolución

$\mathcal{Q}(x)$ puede calcularse en función de la distribución de ξ, $F(\xi)$.

$$\mathcal{Q}(x) = \int_0^x (-q\xi - r(x-\xi))\, dF(\xi) + \int_x^\infty -qx\, dF(\xi)$$

$$= -(q-r)\int_0^x \xi\, dF(\xi)^{(\S)} - rxF(x) - qx(1-F(x))$$

[integrando (§) por partes]

$$= -(q-r)\left(xF(x) - \int_0^x F(\xi)\, d\xi\right) - rxF(x) - qx(1-F(x))$$

$$= -qx + (q-r)\int_0^x F(\xi) d\xi.$$

Por lo que su derivada es $\mathcal{Q}'(x) = -q + (q-r)F(x)$.

“Canilla” – Solución

Estableciendo la condición necesaria para el óptimo

$$c + \mathcal{Q}'(x) = c - q + (q - r)F(x) = 0,$$

$$F(x) = \frac{q - c}{q - r}.$$

Sea $\alpha := \frac{q-c}{q-r}$.
La solución en función de la distribución es

$$\begin{cases} x^* = 0, & \text{si} \quad \alpha < F(0), \\ x^* = u, & \text{si} \quad \alpha > F(u), \\ x^* = F^{-1}(\alpha) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde $F^{-1}(\alpha)$ es el α-cuantil de $F(\xi)$.