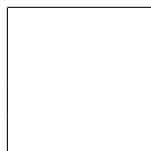


EXAMEN
8 DE FEBRERO DE 2013



No. Examen

Apellido y Nombre

Cédula de Identidad

Ejercicio 1

Se considera $A = \{(1, 2, -1), (1, 0, 1), (0, 1, a)\} \subset \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Discutir según a la dependencia lineal del conjunto A .
2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2, -1) = (3, -2)$; $T(1, 0, 1) = (-1, 5)$; $T(0, 1, a) = (2, b)$ tal que $b \in \mathbb{R}$.
 - a) Discutir según a y b la existencia de transformaciones lineales T que cumplan las condiciones dadas. En caso de existencia, determinar todas las posibles.
 - b) Para $a = b = 3$, hallar ${}_B[T]_A$, donde $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$.
 - c) Mediante matrices de cambio de base, hallar la matriz asociada a T en las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente.

3. Sea $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$

- a) Hallar ecuaciones paramétricas y reducida del subespacio vectorial S tal que $r \subset S$.
- b) Verificar que $P = (1, 1, 1) \notin S$ y hallar el punto Q , proyección de P sobre S .

Ejercicio 2

1. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal, $S \subset V$ un subespacio vectorial. Se dice que S es T -invariante si $T(S) \subset S$, esto es, si $T(v) \in S$, $\forall v \in S$.
 - a) Probar que $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$ son T -invariantes.
 - b) Sea $G = \{v_1, \dots, v_r\}$ un generador finito de S , probar que si $T(v_i) \in S$, $\forall i = 1, \dots, r$, entonces S es T -invariante.
2. Se considera $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = \left(\frac{x - y + z}{\sqrt{2}}, \frac{x + y + (\sqrt{2} - 1)z}{\sqrt{2}}, -z \right)$$

- a) Probar que T es una transformación lineal.
- b) Sean $S_1 = \langle \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0)\} \rangle$ y $S_2 = \langle \{(0, 1, 1)\} \rangle$.
Determinar si S_1 y S_2 son T -invariantes.
- c) Sea S_3 un subespacio vectorial tal que $\{0\} \neq S_3 \subsetneq S_1$. Probar que S_3 no es T -invariante.