Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Geometría y Álgebra Lineal 1 - Anual
Curso 2012

Examen
8 de Febrero de 2013

No. Examen

Apellido y Nombre

Cédula de Identidad

Ejercicio 1

Se considera $A = \{(1,2,-1),(1,0,1),(0,1,a)\} \subset \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Discutir según a la dependencia lineal del conjunto A.
2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,2,-1) = (3,-2)$; $T(1,0,1) = (-1,5)$; $T(0,1,a) = (2,b)$ tal que $b \in \mathbb{R}$.
   a) Discutir según a y b la existencia de transformaciones lineales T que cumplan las condiciones dadas. En caso de existencia, determinar todas las posibles.
   b) Para $a = b = 3$, hallar ${}_B[T]_A$, donde $B = \{(1,1),(1,-1)\}$.
   c) Mediante matrices de cambio de base, hallar la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.
3. Sea $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$
   a) Hallar ecuaciones paramétricas y reducida del subespacio vectorial S tal que $r \subset S$.
   b) Verificar que $P = (1,1,1) \notin S$ y hallar el punto Q, proyección de P sobre S.

Ejercicio 2

1. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, $S \subset V$ un subespacio vectorial. Se dice que S es T-invariante si $T(S) \subset S$, esto es, si $T(v) \in S$, $\forall\, v \in S$.
   a) Probar que $\ker(T)$ e $Im(T)$ son T-invariantes.
   b) Sea $G = \{v_1, \dots, v_r\}$ un generador finito de S, probar que si $T(v_i) \in S$, $\forall i = 1, \dots, r$, entonces S es T-invariante.
2. Se considera $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$T(x,y,z) = \left(\frac{x - y + z}{\sqrt{2}}, \frac{x + y + (\sqrt{2} - 1)z}{\sqrt{2}}, -z \right)$$
   a) Probar que T es una transformación lineal.
   b) Sean $S_1 = \langle \{(1,1,0),(-1,1,0)\} \rangle$ y $S_2 = \langle \{(0,1,1)\} \rangle$.
   Determinar si S_1 y S_2 son T-invariantes.
   c) Sea S_3 un subespacio vectorial tal que $\{0\} \neq S_3 \subsetneq S_1$. Probar que S_3 no es T-invariante.