

# PRÁCTICO N°2: ELECTROSTÁTICA EN PRESENCIA DE MEDIOS MATERIALES. CONDICIONES DE BORDE.\*

M. Forets

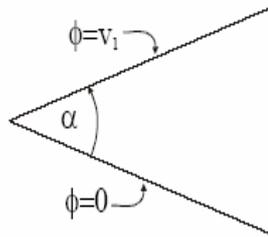
## Resumen

Solución de problemas seleccionados del práctico 2 del curso de Electromagnetismo de la Facultad de Ingeniería, Udelar. La numeración corresponde al práctico de 2008 (prac2-2008.pdf).

## Índice

- |  |   |
|--|---|
| 1. Problema 4. Esquina con dos planos infinitos.                               | 1 |
| 2. Problema 5. Capacidad de un condensador cónico.                             | 3 |
| 3. Problema 10. Condiciones de borde en un sistema con simetría de revolución. | 5 |

## 1. Problema 4. Esquina con dos planos infinitos.



### Enunciado

En la figura se muestra la sección transversal de dos placas planas conductoras infinitas que forman un ángulo  $\alpha$ . Sus bordes están separados una distancia infinitesimal, de manera que se puede suponer que no se tocan.

Una de ellas se encuentra conectada a tierra,  $\Phi = 0$ , y la otra a un potencial fijo,  $\Phi = V_1$ .

Utilice argumentos de simetría y suponga que el campo eléctrico no tiene componente radial.

1. Halle la forma funcional del campo entre las placas usando la expresión diferencial de la ley de Gauss y la irrotacionalidad del mismo.
2. Halle el potencial electrostático imponiendo condiciones de borde.
3. Halle las densidades superficiales de carga sobre las placas.

### Solución

1. Lo primero que tenemos que resolver es el sistema de coordenadas (SC) a utilizar. Es evidente que el problema se reduce a un problema bidimensional por el hecho de que los planos son infinitos en la dirección perpendicular a la figura, que llamaremos dirección  $z$ . Elegimos un SC cilíndrico con centro en el vértice que forman los planos; un punto se ubica entonces en el plano  $z = 0$  con sus coordenadas  $(r, \varphi)$ , con  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $0 \leq r < \infty$ .

\*Por correcciones o sugerencias: [mforets@fing.edu.uy](mailto:mforets@fing.edu.uy)

Por la hipótesis de que el campo eléctrico no tiene componente radial,  $\vec{E}(r, \varphi) = E_\varphi(r, \varphi) \hat{e}_\varphi$ . La ley de Gauss es  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , pero en el espacio que nos interesa  $\rho = 0$ , por lo que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  implica, expresando la divergencia en coordenadas cilíndricas,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(E_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_\varphi \neq E_\varphi(\varphi) \quad (1)$$

La ecuación (1) implica que  $E_\varphi = E_\varphi(r)$ . Por otra parte, el campo eléctrico es irrotacional porque estamos trabajando en condiciones electrostáticas. Expresando el rotor del campo eléctrico en coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_z = 0 \\ \Rightarrow E_\varphi + r \frac{dE_\varphi}{dr} &= 0 \Rightarrow \int \frac{E'_\varphi(r) dr}{E_\varphi(r)} = - \int \frac{1}{r} dr \end{aligned} \quad (2)$$

Resolviendo obtenemos la forma del campo eléctrico, a menos de una constante a determinar,

$$\vec{E}(r) = \frac{C}{r} \hat{e}_\varphi \quad (3)$$

2. El potencial electrostático debe cumplir  $\vec{E} = -\nabla\Phi$ , siendo  $\Phi = \Phi(r, \varphi)$ . El gradiente en cilíndricas es  $\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \hat{e}_z$ , que al comparar con la ec. (3) da

$$\begin{aligned} \Phi \neq \Phi(r); \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} &= -\frac{C}{r} \Rightarrow \\ \Phi(\varphi) &= -C\varphi + C_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Las constantes se determinan fácilmente imponiendo las condiciones de borde (CB) apropiadas,

- $\Phi(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0$
- $\Phi(\alpha) = V_1 \Rightarrow C = -\frac{V_1}{\alpha}$

$$\Phi(\varphi) = \frac{V_1}{\alpha} \varphi; \quad \vec{E}(r) = -\frac{V_1}{\alpha r} \hat{e}_\varphi \quad (5)$$

3. Las densidades superficiales de carga se hallan aplicando la ley de Gauss en un cilindro de tapas paralelas a una placa y cuya altura tiende a cero. Si llamamos 2 a la región de interés y 1 a la región exterior, entonces

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc.}}{\epsilon_0} \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

, con  $\hat{n}_2$  saliente a la superficie gaussiana considerada en cada caso.

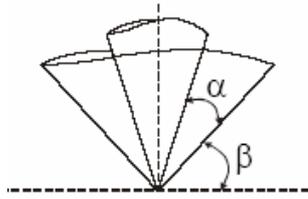
- $\varphi = 0$ . Tenemos  $\hat{n}_2 = \hat{e}_\varphi$ ,  $\vec{E}_1 = 0$  (región ext.), región interior:  $\vec{E}_2 = -\frac{V_1}{\alpha r} \hat{e}_\varphi \Rightarrow$

$$\sigma_0(r) = -\frac{V_1}{\alpha r} \epsilon_0 \quad (6)$$

- $\varphi = \alpha$ . Tenemos  $\hat{n}_2 = -\hat{e}_\varphi$ ,  $\vec{E}_1 = 0$  (región ext.), región interior:  $\vec{E}_2 = -\frac{V_1}{\alpha r} \hat{e}_\varphi \Rightarrow$

$$\sigma_\alpha(r) = \frac{V_1}{\alpha r} \epsilon_0 \quad (7)$$

## 2. Problema 5. Capacidad de un condensador cónico.



### Enunciado

Calcular la capacidad de un condensador cónico. Se supondrá que el campo eléctrico entre las placas no tiene componente radial y que las puntas de los conos están separadas una distancia infinitesimal, de manera que no están en contacto.

Los conos tienen su vértice coincidente y sus ejes de revolución coinciden. Los ángulos al eje de cada cono son respectivamente  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . En el dibujo,  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$  y  $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \beta$ . Usaremos, por una cuestión de conveniencia, los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en vez de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

### Solución

El SC más conveniente es esférico con origen en el vértice de los conos y eje z coincidente con el eje de revolución de los conos. Un punto se ubica entonces por sus coordenadas  $(r, \theta, \varphi)$ . Sin embargo, hay simetría en el ángulo  $\varphi$ , por lo que el problema se reduce a uno bidimensional. Como nos interesa hallar la capacidad del sistema, supongamos que se coloca una carga total  $-Q$  en el cono 1 (con ángulo al eje  $\theta_1$ ) y una carga total  $+Q$  en el cono 2 (con ángulo al eje  $\theta_2$ ). Si llamamos  $V = V_+ - V_-$  a la diferencia de potencial del cono 2 respecto al cono 1, entonces la capacidad es por definición  $C \equiv \frac{Q}{V}$ , con  $V = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

Así que si hallamos el campo eléctrico en la zona de interés,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , podemos calcular su integral de línea (que debe quedar proporcional a la magnitud de la carga colocada en cada cono,  $Q$ ) y el problema está resuelto. Está claro que lo que sigue es hallar la forma general del campo eléctrico sujeto a las condiciones del problema. Las herramientas que disponemos para avanzar ahora son:

- Hipótesis de que el campo eléctrico no tiene componente radial + simetría en el ángulo polar ( $\varphi$ ) implican que  $\vec{E} = E_\theta(r, \theta) \hat{e}_\theta$ .
- ley de Gauss. En su forma diferencial,  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . En el espacio entre los conos no hay densidad de carga libre, entonces  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  en espacio entre los conos. De aquí se obtendrá información sobre el campo eléctrico en este problema. La divergencia del campo  $\vec{E}$  en coordenadas esféricas es  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(E_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$ .
- $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$  en condiciones electrostáticas. De esta condición también se desprenderá información sobre la forma que debe tener el campo eléctrico en este sistema. El rotor en coordenadas esféricas del campo  $\vec{E}$  es  $\nabla \times \vec{E} = \hat{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(E_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} \right) + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right)$ .

Notemos que si bien avanzaremos hacia la forma matemática que debe tener el campo eléctrico, aún queda sin imponer la condición de borde del problema; por ejemplo que se ha colocado una carga  $-Q$  en el cono 1. De manera que esperamos que al resolver estos tres puntos obtengamos la forma matemática del campo eléctrico en donde aparezcan ciertas constantes a determinar de acuerdo a las CB.

De los puntos 1 y 2 resulta la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \sin \theta + E_\theta \cos \theta = 0 \quad (8)$$

De 1 y 3 resulta:

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} E_\theta = 0 \quad (9)$$

El truco ahora consiste en aplicar el método de separación de variables. Este consiste en suponer que la función buscada,  $E_\theta(r, \theta)$ , se puede descomponer en una parte radial y una parte tangencial, es decir, pretendemos hallar

dos funciones de variable real,  $f(r), g(\theta)$ , tales que  $E_\theta(r, \theta) = f(r) g(\theta)$ . De (8), sustituyendo directamente,

$$f(r) g'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(r) g(\theta) \cos \theta = 0 \Rightarrow \int \frac{g'(\theta)}{g(\theta)} d\theta = - \int \frac{1}{\tan \theta} d\theta.$$

Sea  $I_\theta = \int \frac{1}{\tan \theta} d\theta$ . Calculemos esta primitiva, introduciendo el cambio de variable  $u = \cos \theta$

$$I_\theta = \int \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} d\theta = - \int \frac{u}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \log(1-u^2) = \frac{1}{2} \log(\operatorname{sen}^2 \theta) = \log(\operatorname{sen}(\theta))$$

Entonces  $g(\theta) = A_1 \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$ , con  $A_1$  constante.

De (2),

$$f'(r) g(\theta) + \frac{1}{r} f(r) g(\theta) = 0 \Rightarrow \int \frac{f'(r)}{f(r)} dr = - \int \frac{1}{r} dr \Rightarrow f(r) = \frac{A_2}{r}$$

Resulta

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{A}{r \operatorname{sen} \theta}. \quad (10)$$

Como habíamos discutido anteriormente, se obtuvo la forma matemática del campo eléctrico, ec. (10), con la constante  $A$  a determinar.

Nos concentramos en el cono 1 (dada la simetría del problema, da igual trabajar con el cono 2). Sabemos que se colocó una carga total  $-Q$ . Entonces, sea cual sea la función distribución de carga  $\sigma = \sigma(r)$ , debe ser tal que  $\int \sigma da = -Q$ . Como región de integración elegimos una distancia  $L$  al vértice del cono. La ley de Gauss aplicada a un pequeño cilindro de caras paralelas a la superficie del cono y cuya altura tiende a cero, da la relación entre el campo eléctrico a ambos lados del pedacito de cono y la densidad superficial de carga en ese lugar. Consideramos que no hay campo eléctrico en la región externa al igual que en un condensador de placas paralelas.<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} (\vec{E}_{\text{interno}} - \vec{E}_{\text{externo}}) \cdot \hat{n}_2 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \quad \hat{n}_2 = \hat{e}_\theta \Rightarrow \frac{A}{r \operatorname{sen} \theta_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow -Q = \frac{A \epsilon_0}{\operatorname{sen} \theta_1} \int_0^L \frac{dr}{r} r \operatorname{sen} \theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &\Rightarrow A = -\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \end{aligned}$$

Llegamos entonces al campo eléctrico,

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{-Q}{2\pi \epsilon_0 L} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \hat{e}_\theta \quad (11)$$

Ahora haciendo la integral de línea,

$$V = - \int_{-}^{+} \frac{-Q}{2\pi \epsilon_0 L} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} r d\theta = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

Si llamamos  $M_\theta(\theta_1, \theta_2) \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta}$ , entonces la capacidad por unidad de longitud es

$$\frac{C}{L} = \frac{Q}{V L} = \frac{2\pi \epsilon_0}{M_\theta(\theta_1, \theta_2)} \quad (12)$$

Hallemos esta integral. Existe un método útil<sup>2</sup> para tratar *integrales trigonométricas*, es decir aquellas de la forma

$\int f(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$ . El método consiste en transformar la integral, mediante un cambio de variable, en otra integral donde aparezcan cocientes de polinomios. El cambio de variable es  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  y de ahí que derivando y aplicando la regla de la cadena,  $d\theta = \frac{2 dt}{1+t^2}$ . Además  $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  y  $\operatorname{sen} \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ .

En nuestro problema tenemos

$$\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log \tan \frac{\theta}{2}$$

<sup>1</sup>Se puede pensar en términos del teorema de unicidad de las soluciones de la ecuación de Laplace. En las regiones diferentes a la comprendida entre las placas, el potencial es constante. Es decir, para  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  (o  $\theta_2 \leq \theta \leq \pi$ ) el potencial es  $V_-$  (o  $V_+$ ).

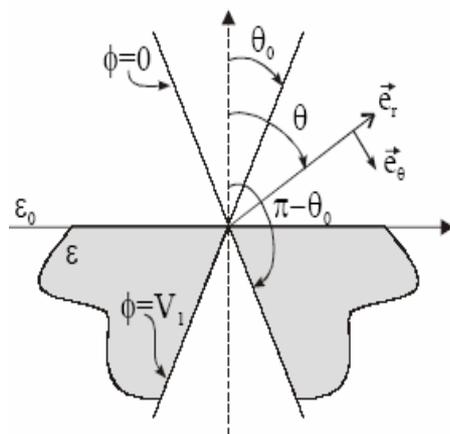
<sup>2</sup>Referencia: <http://mathworld.wolfram.com/TrigonometricSubstitution.html>. También introduce otro método que consiste en integración en curvas en el plano complejo, para el cual se precisa conocimiento de análisis complejo.

$$\Rightarrow M_\theta(\theta_1, \theta_2) = \log \left( \frac{\tan \frac{\theta_2}{2}}{\tan \frac{\theta_1}{2}} \right) \quad (13)$$

Sustituyendo este resultado, ec. (13), en la ec. (12) terminamos el problema,

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log \left( \frac{\tan \frac{\theta_2}{2}}{\tan \frac{\theta_1}{2}} \right)}. \quad (14)$$

### 3. Problema 10. Condiciones de borde en un sistema con simetría de revolución.



#### Enunciado

Dos conos idénticos opuestos por el vértice y de eje común se encuentran a potenciales  $\Phi = 0$  y  $\Phi = V$  (en la figura aparece como  $V_1$ , pero nosotros le llamaremos  $V$ ). Llenando la mitad del espacio entre ellos, hay un material dieléctrico de permeabilidad  $\epsilon$ .

1. Halle los campos  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{P}$  en la región entre los conos.
2. Halle todas las densidades de carga.

Se supondrá que los campos no tienen componente radial.

#### Solución

1. Elegimos un SC esféricas con origen en el vértice de los conos, y tal que el eje z coincide con el eje de revolución de los conos. Llamemos 1 a la zona sin dieléctrico (permeabilidad  $\epsilon_0$ ) y 2 a la zona con dieléctrico (permeabilidad  $\epsilon$ ), que asumimos es lineal, isótropo y homogéneo<sup>3</sup>, porque no tenemos más información que el escalar  $\epsilon$ . Las relaciones entre los campos son, en cada zona:

- Zona 1,  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2 \rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  ;  $\vec{P} = \vec{0}$  porque no hay dieléctrico.
- Zona 2,  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi - \theta_0 \rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  ;  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

Conviene introducir  $k = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ , la constante dieléctrica del medio 2.

Trabajemos primero en el medio 1. Sabemos que  $\vec{E}(r, \theta) = E_\theta(r, \theta) \hat{e}_\theta$  porque por hipótesis el campo eléctrico

<sup>3</sup>Recordar qué significa cada adjetivo:

- Lineal: existe un mapa  $\eta$  (matriz real 3x3) que relaciona el vector desplazamiento eléctrico con el vector campo eléctrico,  $\vec{D} = \eta \vec{E}$ .
- Isótropo: *no existen direcciones privilegiadas*, esto es, dado un punto del material, si uno se mueve en cualquier dirección encuentra las mismas propiedades físicas, es una propiedad *local*.
- Homogéneo: las propiedades físicas son las mismas en cualquier punto; es una propiedad *global*.

Estas tres hipótesis implican que  $\eta = \epsilon I$  (donde  $I$  es la matriz identidad 3x3) y  $\epsilon$  un escalar.

no tiene componente radial. Hemos visto en los problemas anteriores, en particular en el problema 5, que esta condición sumada a la irrotacionalidad del campo eléctrico y que la divergencia del campo eléctrico es cero, da la forma que debe tener el campo eléctrico:  $\vec{E}(r, \theta) = \frac{C}{r \operatorname{sen} \theta} \hat{e}_\theta$ . Será conveniente trabajar con el método de potenciales electrostáticos para después obtener los campos a partir de ellos y de los puntos que se destacan arriba. La razón es que las CB que nos dan en la letra del problema es sobre el potencial de cada cono. Por eso nos proponemos hallar la forma que debe tener el potencial electrostático en cada zona para después imponer las CB adecuadas. Buscamos una función  $\Phi = \Phi(r, \theta)$  y tal que  $\vec{E} = -\nabla\Phi$ . En coordenadas esféricas,  $\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \hat{e}_\varphi$  de donde, comparando con la expresión del campo eléctrico, tenemos:

- $\Phi \neq \Phi(r)$
- $\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{C}{r \operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \int d\Phi = \int \frac{C}{\operatorname{sen} \theta} d\theta$   
Sabemos por el problema 5 cuánto vale la primitiva  $\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta} = \log \tan \frac{\theta}{2}$ , entonces  $\Phi(\theta) = C_1 \log \tan \frac{\theta}{2} + C_2$ .

La pregunta que surge inmediatamente es: ¿hay una función potencial electrostático en la zona 2 que tenga también esta forma? La respuesta es que sí, y surge de inmediato debido a las propiedades lineales del material. De hecho, la ecuación  $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$  se verifica inmediatamente porque estamos trabajando en condiciones electrostáticas, y la ley de Gauss,  $\nabla \cdot \vec{D} = 0 \rightarrow \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = 0$ , que es lo que teníamos en 1. Observemos que hay cuatro constantes a determinar, dos por cada función potencial.

- $\Phi_1(\theta) = C_{10} \log \tan \frac{\theta}{2} + C_{11}$
- $\Phi_2(\theta) = C_{20} \log \tan \frac{\theta}{2} + C_{21}$

Con esta convención,  $\vec{E}_1(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} \hat{e}_\theta = \frac{-C_{10}}{r \operatorname{sen} \theta} \hat{e}_\theta$  y  $\vec{E}_2(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} \hat{e}_\theta = \frac{-C_{20}}{r \operatorname{sen} \theta} \hat{e}_\theta$ . Será necesario, por lo tanto, encontrar cuatro CB. Estas son:

1.  $\Phi_1(\theta_0) = 0 \Rightarrow C_{11} = -C_{10} \log \tan \frac{\theta_0}{2}$
2.  $\Phi_1(\pi/2) = \Phi_2(\pi/2) \Rightarrow C_{11} = C_{21}$
3.  $\Phi_2(\pi - \theta_0) = V \Rightarrow C_{20} = \frac{C_{21} - V}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}}$
4.  $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2 = 0$  ;  $\hat{n}_2 = \hat{e}_\theta$  en  $\theta = \pi/2$ ,  $\Rightarrow \epsilon \left( \frac{-1}{r \operatorname{sen}(\pi/2)} C_{20} \hat{e}_\theta \cdot \hat{n}_2 \right) = \epsilon_0 \left( \frac{-C_{10}}{r \operatorname{sen}(\pi/2)} \hat{e}_\theta \cdot \hat{n}_2 \right) \Rightarrow \Rightarrow C_{20} = k^{-1} C_{10}$

En el punto 3 usamos la propiedad  $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \tan^{-1} x$ . Se puede verificar construyendo a mano -o con un paquete para PC<sup>4</sup>- la gráfica del  $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$  a partir de la del  $\operatorname{sen} x$ , y verificar que coincide con la del  $\cos x$ ; lo mismo con  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen} x$ .

A partir de las relaciones 1 a 4, encontramos  $C_{10} = -\frac{V}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}} (1 + k^{-1})^{-1}$ ; de ahí que:

$$\Phi_1(\theta) = V (1 + k^{-1})^{-1} \left( 1 - \frac{\log \tan \frac{\theta}{2}}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}} \right) ; \vec{E}_1(r, \theta) = \frac{V (1 + k^{-1})^{-1}}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \hat{e}_\theta \quad (15)$$

$$\vec{P}_1 = \vec{0} ; \vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1,$$

y

$$\Phi_2(\theta) = V (1 + k^{-1})^{-1} \left( 1 - k^{-1} \frac{\log \tan \frac{\theta}{2}}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}} \right) ; \vec{E}_2(r, \theta) = \frac{V (1 + k^{-1})^{-1} k^{-1}}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \hat{e}_\theta \quad (16)$$

$$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_2 = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_2 ; \vec{D}_2 = \epsilon \vec{E}_2$$

2. Las densidades de carga se calculan en cada caso por la manera usual de relacionar mediante la Ley de Gauss el campo eléctrico local a un pedacito de la superficie (ver por ejemplo la sección 1):

- $\theta = \theta_0$  :  $\sigma = \vec{E}_1 \cdot \hat{e}_\theta = \epsilon_0 \frac{V(1+k^{-1})^{-1}}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta_0}$

<sup>4</sup>Hay programas para hacer gráficos en un entorno Windows muy sencillos de usar y livianos, por ejemplo Winplot (<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>), se descarga gratuitamente y pesa 740kb. En un entorno Linux, recomiendo el gnuplot.

- $\theta = \pi/2$ :  $\sigma_p = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = \vec{P}_2 \cdot \hat{e}_\theta(-) = (\epsilon_0 - \epsilon) \frac{V(1+k^{-1})^{-1} k^{-1}}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}} \frac{1}{r}$
- $\theta = \pi - \theta_0$ :  $\sigma_p = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = \vec{P}_2 \cdot \hat{e}_\theta = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{V(1+k^{-1})^{-1} k^{-1}}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}} \frac{1}{r \sin \theta_0}$
- $\theta = \pi - \theta_0$ :  $\sigma = \vec{D}_2 \cdot \hat{e}_\theta(-) = -\epsilon \frac{V(1+k^{-1})^{-1} k^{-1}}{\log \tan \frac{\theta_0}{2}} \frac{1}{r \sin \theta_0}$
- $\rho_p = 0$  en 1 y en 2 como es fácil verificar tanto en 1 (trivial) y en 2, porque  $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}_2$ , y  $\nabla \cdot \left( \frac{1}{r \sin \theta} \hat{e}_\theta \right) = 0$ ; alcanza con *mirar* la expresión de la divergencia en esféricas.