Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 1 - Anual**
Facultad de Ingeniería **Curso 2011**
Instituto de Matemática y Estadística

EXAMEN
9 DE DICIEMBRE DE 2011

No. Examen	Apellido y nombre	Cédula de Identidad

Ejercicio 1
Sean $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (x-2y, 2y+2z-x, x-y-z)$, $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{B} = \{(1,0,0);(1,0,1);(0,1,1)\}$.

1. Probar que T es una transformación lineal.
2. Probar que $S \circ T \neq T \circ S$ y hallar la expresión de $T \circ S$.
3. Determinar si T es un isomorfismo y en caso afirmativo hallar T^{-1}.

Ejercicio 2
1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sean $W_1, \ldots, W_n \subset V$ subespacios vectoriales.
   a) Probar que $W_1 \cap \ldots \cap W_n$ es un subespacio vectorial de V.
   b) ¿Es $W_1 \cup \ldots \cup W_n$ un subespacio vectorial? Justificar.
2. Sea $V = \mathbb{R}^3$, determinar en cada caso si con las operaciones definidas a continuación, $\mathbb{R}^3$ tiene estructura de espacio vectorial:
   a) $(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ y
   $$\lambda(x_1,y_1,z_1) = \begin{cases} (0,0,0) & \text{si } \lambda = 0 \\ \left(\lambda x_1, \dfrac{y_1}{\lambda}, \lambda z_1\right) & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$
   b) $(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ y
   $\lambda(x_1,y_1,z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda)$

Ejercicio 3

1. Sea $T : \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a-b, c+b+d, 2a+c+d)$$

   a) Hallar $\ker(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ y bases de los mismos.
   b) Hallar ${}_{C'}[T]_C$, donde C y C' son las bases canónicas de $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente y ${}_{\mathcal{B}'}[T]_C$ donde $\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(0,2,0),(0,1,1)\}$.
   c) Hallar $\operatorname{Im}(T) \cap W$ donde $W = \langle\{(2,1,0),(1,1,1)\}\rangle$. ¿Es $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}(T) \oplus W$?

2. Resolver el siguiente sistema discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \alpha y + 2z = 0 \\ -x + y + \alpha z = 2 \\ -\alpha x - y - 4\alpha z = 4 \end{cases}$$

   a) Para $\alpha = 1$, hallar la distancia de P_1 al plano π tal que $\pi : y + z = 0$.

Esquema de solución

Ejercicio 1:

1. Veamos que T es lineal, para esto debemos observar que $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v),\ \forall\ u, v \in V,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
T(\lambda u + v) &= ((\lambda u_1 + v_1) - 2(\lambda u_2 + v_2), 2(\lambda u_2 + v_2) + 2(\lambda u_3 + v_3) - (\lambda u_1 + v_1), \\
&\quad (\lambda u_1 + v_1) - (\lambda u_2 + v_2) - (\lambda u_3 + v_3)) \\
&= (\lambda u_1 + v_1 - 2\lambda u_2 - 2v_2, 2\lambda u_2 + 2v_2 + 2\lambda u_3 + 2v_3 - \lambda u_1 - v_1, \lambda u_1 + v_1 - \lambda u_2 - v_2 - \lambda u_3 - v_3) \\
&= (\lambda u_1 - \lambda 2u_2, \lambda 2u_2 + \lambda 2u_3 - \lambda u_1, \lambda u_1 - \lambda u_1 - \lambda u_2 - \lambda u_3) + \\
&\quad (v_1 - 2v_2, 2v_2 + 2v_3 - v_1, v_1 - v_2 - v_3) \\
&= \lambda(u_1 - 2u_2, 2u_2 + 2u_3 - u_1, u_1 - u_2 - u_3) + (v_1 - 2v_2, 2v_2 + 2v_3 - v_1, v_1 - v_2 - v_3) \\
&= \lambda T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

2. $T(1,0,0) = (1,-1,1)$ y $coord_{\mathcal{B}}(T(1,0,0)) = (-1,2,-1)$, $T(1,0,1) = (1,1,0)$ y $coord_{\mathcal{B}}(T(1,0,1)) = (2,-1,1)$, $T(0,1,1) = (-2,4,-2)$ y $coord_{\mathcal{B}}(T(1,0,1)) = (4,-6,4)$. Con lo que

$$_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Antes de pasar a resover esta parte hallemos las coordenadas de un vector genérico (x,y,z) en la base $\mathcal{B}$. Luego de algunos cálculos obtenemos $(x,y,z) = (x+y-z)(1,0,0) + (z-y)(1,0,1) + y(0,1,1)$ con lo que $coord_{\mathcal{B}}(x,y,z) = (x+y-z, z-y, y)$.

Para determinar si $T \circ S = S \circ T$ hallemos sus matrices asociadas en una base y veamos si son iguales o no. Para ahorrarnos bastantes cálculos tomemos como base a $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
_{\mathcal{B}}[T \circ S]_{\mathcal{B}} &= {_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}}\ {_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
_{\mathcal{B}}[S \circ T]_{\mathcal{B}} &= {_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}}\ {_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Como (**??**)$\neq$(**??**), entonces $S \circ T \neq T \circ S$.

Para hallar $T \circ S$, observar que ya tenemos su matriz asociada en la base $\mathcal{B}$ y $coord_{\mathcal{B}}(x, y, z)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y-z \\ z-y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-4y+7z \\ 6x+9y-13z \\ -3x-5y+8z \end{pmatrix} \tag{3}$$

Y (**??**)$= coord_{\mathcal{B}}(T \circ S(x,y,z))$, con lo que $T \circ S(x,y,z) = (5x+5y-6z, -3x-5y+8z, 3x+4y-5z)$.

3. $(x, y, z) \in \ker(T)$ si $\begin{cases} x - 2y &= 0 \\ 2y + 2z - x &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{cases}$ Luego de reslover el sistema obtenemos que $\ker(T) = \{0\}$ y T es inyectiva. Por el teorema de las dimensiones $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} = \underbrace{\dim(\ker(T))}_{0} + \dim(Im(T))$.

   Por tanto T es sobreyectiva ya que $Im(T) \subset \mathbb{R}^3$ y $\dim(Im(T)) = 3$.
   En conclusión T es un isomorfismo.

   Consideremos $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Se tiene que

$$_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Luego de unos cálculos se obtiene que

$$(_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por tanto $T^{-1}(x, y, z) = (y + 2z, -x/2 + y/2 + z, x/2 + y/2)$.

Ejercicio 2

1. Ver teórico.

2. *a*) Las propiedades de la suma son inmediatas, para el producto por un escalar:
   §$1(x, y, z) = (1x, y/1, 1z) = (x, y, z) \ \forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   §$(\alpha\beta)(x, y, z) = (\alpha\beta x, \frac{y}{\alpha\beta}, \alpha\beta z) = \alpha(\beta x, y/\beta, \beta z) \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   §$\alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (\alpha(x_1 + x_2), \frac{y_1+y_2}{\alpha}, \alpha(z_1 + z_2)) =$
   $= (\alpha x_1, \frac{y_1}{\alpha}, \alpha z_1) + (\alpha x_2, \frac{y_2}{\alpha}, \alpha z_2) = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \alpha(x_2, y_2, y_3)$

   b) Observar que tomando $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z \neq 1$, entonces $1(x, y, z) = (x, y, 1) \neq (x, y, z)$. Por tanto con este producto $\mathbb{R}^3$ no tiene estructura de espacio vectorial.

Ejercicio 3

1. *a*) Para hallar $\ker(T)$ resolvemos el sistema $\begin{cases} 2a - b &= 0 \\ b + c + d &= 0 \\ 2a + c + d &= 0 \end{cases}$ que tiene como solución matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 2a \\ c & -2a - c \end{pmatrix}$ y por tanto una base de $\ker(T)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

   Para hallar $\mathrm{Im}(T)$ resolvemos el sistema $\begin{cases} 2a - b &= x \\ b + c + d &= y \\ 2a + c + d &= z \end{cases}$

   que tiene como solución $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$ y una base de $\mathrm{Im}(T)$ es $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

2.

$$_{C'}[T]_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } _{\mathcal{B}'}[T]_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha & 2 \\ -\alpha & -1 & -4\alpha & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 2+\alpha & 2 \\ 0 & \alpha^2-1 & -2\alpha & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(2+\alpha)-2\alpha & 4+2(1-\alpha) \end{array}\right)$$

Resolviendo la ecuación $-\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$.
Si $\alpha = \alpha_1$ o $\alpha = \alpha_2$ entonces el sistema es incompatible. Si $\alpha = -1$ también el sistema es incompatible, en caso contrario el sistema es compatible determinado.

Tomando $\alpha = 1$ se tiene que $P = (0, 4, -2)$ y $d(P, \pi) = 2/\sqrt{2}$.