Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Geometría y Álgebra Lineal 1 - Anual
Curso 2011

Segundo Parcial Globalizador.
26 de Noviembre

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

No. Parcial

Ejercicio 1

1. Definir subespacio vectorial.

2. Se considera el conjunto $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, donde $v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (1, 1, -1)$.

   a) Probar que $S = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = \alpha v_1 + \beta v_2;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ e indicar su dimensión.

   b) Estudiar la posición relativa del plano π que tiene a v_1 y a v_2 como vectores directores y contiene al origen de coordenadas y la recta r de vector director v_3 que contiene al punto $P = (3, 3, 0)$.

   c) Sea $A = (1, 1, -1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 1, 1)$, $0 = (0, 0, 0)$ y Q el punto medio del segmento de extremos B, C.
   Hallar el área del triángulo $\triangle(AOQ)$.

Ejercicio 2

1. Se considera $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ donde las operaciones estan definidas como:

   a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + 2y_2)$
   $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

   b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 + y_2 + 1, x_1 + x_2 - 1)$
   $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

   c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
   $\lambda(x_1, y_1) = (-\lambda x_1, x_1 y_1)$

   Determinar en cada caso si tienen estructura de espacio vectorial. Justificar.

2. Determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ con las operaciones usuales:
   $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - z = 0\}$

3. Hallar $S_1 \cap S_2$. ¿Es $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$?

Ejercicio 3

1. Mostrar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ que verifica:

$$T(1,0,1) = 3(x+1)^2,\ T(0,1,1) = 3(x+1),\ T(1,1,-1) = 3$$

2. Hallar la expresión general de T.

3. ¿Es T un isomorfismo? Justifica.

4. Hallar ${}_B[T]_A$ donde $B = \{1, x, x^2\}$, $A = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}$ y ${}_{B'}[T]_A$ donde $B' = \{1-x, x^2-1, 1\}$

Ejercicio 4

1. Sean V y W espacios de dimensión finita. $T : V \to W$ lineal. Probar que $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ son subespacios de V y W respectivamente.

2. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2, T(p) = (p(0), p(1)),\ p \in \mathbb{R}_2[x]$:

   a) Hallar $\ker(T)$, $\mathrm{Im}(T)$, ${}_{C'}[T]_C$ con C' y C las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente. Verificar que se cumple el teorema de las dimensiones y determinar si T es inyectiva o sobreyectiva.

   b) Si consideramos $S : \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$,

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 - (b+d)x + (a+b+c)$$

   Hallar $T \circ S$ y su matriz asociada en las bases canónicas.