PRÁCTICO 9

CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS.

En este repartido abordaremos los temas relacionados con la cinemática y la dinámica de los cuerpos rígidos que pueden rotar alrededor de un eje con dirección fija.
Estudiaremos los conceptos de **desplazamiento**, **velocidad y aceleración angulares** para un cuerpo. Esto generaliza el caso del movimiento circular uniforme que habíamos visto antes para un cuerpo puntual. Veremos también la **combinación de movimientos de rotación y traslación** simultáneos y, en particular, los vínculos que surgen cuando un cuerpo se traslada **rotando sin deslizar**.
La dinámica de un cuerpo rígido queda definida por **las fuerzas** y **torques** que actúan sobre este. El **momento de inercia** del cuerpo, que refleja cómo se distribuye su masa alrededor de un eje, caracteriza la resistencia del cuerpo a cambiar su velocidad angular. En la última página se indican los momentos de inercia de algunos cuerpos homogéneos.
Cuando un cuerpo se traslada y rota alrededor de un eje por su centro de masa, su **energía cinética** puede expresarse como la suma de un término asociado a la **rotación** pura y un término asociado a la **traslación** del centro de masa. Gracias a ello podemos usar consideraciones energéticas para resolver diferentes sistemas.

Objetivos de aprendizaje

- Definir desplazamiento, velocidad y aceleración angular en una rotación.
- Resolver situaciones de cinemática rotacional en forma análoga a la cinemática del movimiento lineal.
- Definir el momento de inercia de un sistema.
- Usar el teorema de los ejes paralelos para calcular el momento de inercia de un cuerpo respecto a distintos ejes.
- Calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación pura o en rotación combinada con traslación.
- Usar diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de la dinámica para calcular las fuerzas, torques y aceleraciones.
- Identificar los vínculos que derivan de la condición de rodar sin deslizar.
- Resolver situaciones donde se combina la rotación y la traslación de un cuerpo.

Puedes profundizar sobre estos temas en los capítulos 11 y 12 del libro del curso. En el cuadro listamos los objetivos principales de los ejercicios.

Ejercicio 1

a) Un tornillo se coloca en un mueble usando un destornillador eléctrico que gira a 400 rpm, en un tiempo $\Delta t = 1{,}2$ s. ¿Cuántas revoluciones completó el tornillo?

b) ¿Cuánto vale la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje? ¿Cuánto vale la velocidad angular de la traslación de la Tierra alrededor del Sol? Expresa los resultados en grados/día y en rad/s.

c) Una licuadora está operando a 3000 rpm. Se pulsa un botón para que gire más rápido, a 4500 rpm, lo cual se alcanza en un tiempo de 0,50 s. ¿Cuánto vale la aceleración angular de la licuadora en ese intervalo, supuesta constante?


Destornillador eléctrico


La Tierra


Licuadora

Ejercicio 2 (SZ, ejercicio 9.4)

Las aspas de un ventilador giran con velocidad angular dada por $\omega_z(t) = \gamma - \beta t^2$, donde $\gamma = 5{,}00\ \mathrm{rad/s}$ y $\beta = 0{,}800\ \mathrm{rad/s^3}$.

a) Calcula la aceleración angular en función del tiempo.

b) Calcula la aceleración angular instantánea α_z en $t = 3{,}00\ \mathrm{s}$ y la aceleración angular media $\bar{\alpha}_z$ para el intervalo de $t = 0$ a $t = 3{,}00\ \mathrm{s}$. ¿Qué diferencia hay entre ambas cantidades? Si son diferentes, ¿por qué lo son?

Ejercicio 3 (RHK ejercicio 11.18)

Un carrete de pesca de 8,14 cm de diámetro tiene una tanza de 5,63 m de longitud enrollada a su periferia. Comenzando desde el reposo, se le da al carrete una aceleración angular de $1{,}47\ \mathrm{rad/s^2}$.

a) Despreciando el grosor de la tanza, ¿a través de qué ángulo debe girar el carrete polea para que se desenrolle en su totalidad?

b) ¿Cuánto tiempo le toma?

Ejercicio 4 (RHK, ejercicio 11.35)

Una rueda A de radio $r_A = 10{,}0\ \mathrm{cm}$ está acoplada por medio de una banda B a otra rueda C de radio $r_C = 25{,}0\ \mathrm{cm}$, como se muestra en la figura. La rueda A aumenta su velocidad angular desde el reposo con una aceleración angular uniforme de $1{,}60\ \mathrm{rad/s^2}$. Determina en cuanto tiempo llegará la rueda C a una velocidad de rotación de 100 rpm suponiendo que la banda es inextensible y no desliza sobre las ruedas.

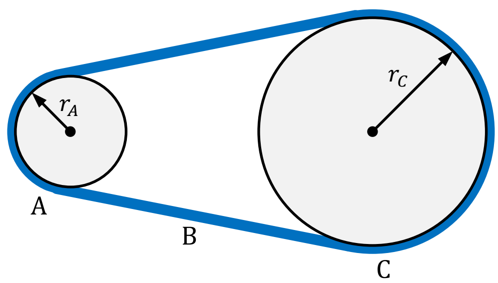


Figura del ejercicio 4

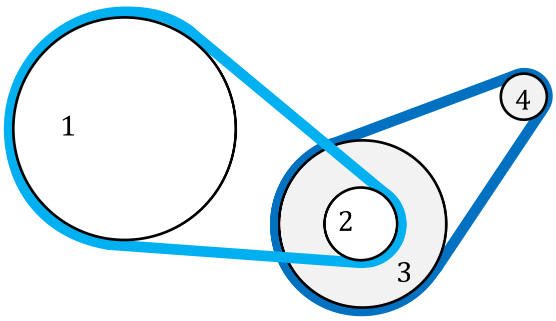


Figura del ejercicio 5

Ejercicio 5 (Parcial 2012)

La rueda 1 de la figura acelera desde el reposo, con una aceleración angular $\alpha_1 = 4{,}0\ \mathrm{rad/s^2}$. Luego de 10 segundos, ¿cuántas vueltas logró dar la rueda 4?

Los radios son $R_1 = 60\ \mathrm{cm}$, $R_2 = 20\ \mathrm{cm}$, $R_3 = 45\ \mathrm{cm}$ y $R_4 = 12\ \mathrm{cm}$. Las correas son inextensibles y no deslizan. Cada rueda gira alrededor de un eje fijo, perpendicular al dibujo, que pasa por su centro. Las ruedas 2 y 3 comparten el mismo eje de rotación y están unidas.

Ejercicio 6

a) Una plataforma giratoria en un parque tiene forma de disco de radio R, y un mecanismo mantiene su velocidad angular constante en un valor fijo ω_0. Tres niñas, A, B y C, corren hacia la plataforma con la misma velocidad $\vec{v}_0$, con la intención de saltar a ella en los puntos A', B' y C' indicados en la figura.

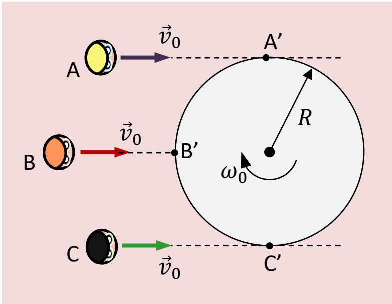


Figura del ejercicio 6.a

   i) ¿Cuál es la velocidad, relativa a cada niña, del punto de la plataforma al cual pretenden saltar?

   ii) ¿Cuánto deben cambiar cada una su cantidad de movimiento para poder acompañar el movimiento de la plataforma? ¿En cuál caso la magnitud del cambio es mayor? Las tres tienen aproximadamente la misma masa.

b) Demuestra que si una rueda de radio R gira con velocidad angular de módulo ω y su centro se traslada con velocidad de módulo $v_c = R\omega$, entonces existe, en cada instante, un punto en el borde de la rueda que tiene velocidad cero y otro punto que tiene velocidad $2v_c$. ¿Cómo se pueden identificar esos puntos?[1]

Ejercicio 7 (SZ ejercicio 9.34)

Cuatro esferas pequeñas, que pueden considerarse como puntos con masa de 0,200 kg cada una, están dispuestas en un cuadrado de 0,400 m de lado, conectadas por varillas ligeras de masa despreciable (ver figura). Calcula el momento de inercia del sistema alrededor de un eje

a) que pasa por el centro del cuadrado, perpendicular a su plano (que pasa por O en la figura);

b) que biseca el cuadrado (pasa por la línea AB en la figura);

c) que pasa por los centros de las esferas superior izquierda e inferior derecha y por el punto O.

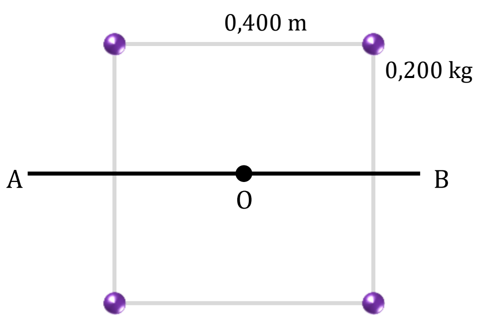


Figura del ejercicio 7

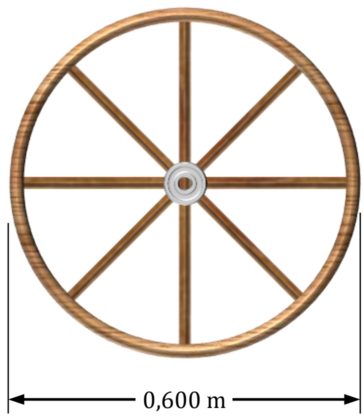


Figura del ejercicio 8

Ejercicio 8 (SZ ejercicio 9.39)

Una rueda de carreta tiene un radio de 0,300 m y la masa de su borde es de 1,40 kg, Cada rayo, que está sobre un diámetro y tiene 0,300 m de longitud, tiene una masa de 0,280 kg. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano?

---

[1] En la página del curso está disponible una aplicación para simular el movimiento combinado de rotación y traslación: https://tinyurl.com/RotaTraslada

Ejercicio 9 🧀🐭

Se tiene un disco uniforme de masa M y radio R al que se le realiza un hueco circular de radio $R/3$, cuyo centro está a una distancia d del centro del disco, como muestra la figura. El momento de inercia $I_\text{o}^{\odot}$ del disco ahuecado respecto a un eje perpendicular al plano que pasa por el punto O, verifica la relación

$$I_\text{o}^{\odot} = \frac{8}{9} I_\text{o}$$

donde I_o es el momento de inercia del disco inicial con respecto al mismo eje. Halla:

a) la diferencia de masa entre el disco inicial y el disco ahuecado, y

b) el valor de d.

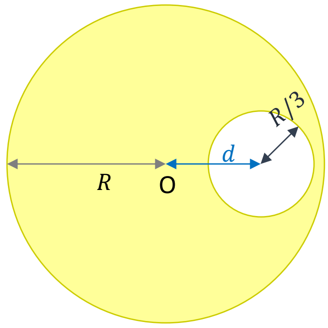


Figura del ejercicio 9

Ejercicio 10 (RHK, ejercicio 12.23)

Una rueda de 31,4 kg de masa y 1,21 m de radio está girando a razón de 283 rpm. Debe ser detenida en 14,8 s. Halla la potencia media requerida, suponiendo que la rueda es un aro delgado.

Ejercicio 11 🌳🪓

Un cuerpo rígido consiste en la unión de una esfera maciza de masa M_1 y radio R con una barra delgada de masa M_2 y largo L, en dirección perpendicular a la superficie de la esfera.

a) Calcula el momento de inercia de este cuerpo con respecto a un eje perpendicular a la barra delgada que pasa por el extremo que no está unido a la esfera (punto P en la figura).

b) Se coloca el cuerpo en una posición inicial tal que la barra queda vertical, con su extremo (punto P) unido a una articulación con respecto a la cual puede girar sin fricción. El objeto se deja caer, rotando alrededor de la articulación. En el momento en que la barra queda en posición *horizontal*, calcula
   i) la velocidad angular del objeto, y
   ii) la velocidad que tiene el centro de la parte esférica del cuerpo.

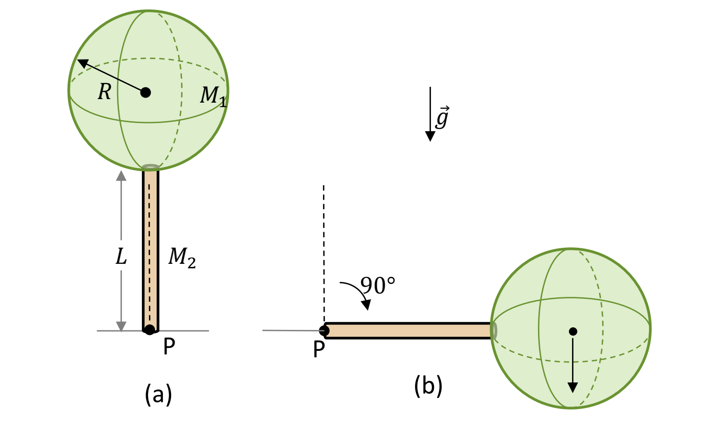


Figura del ejercicio 11

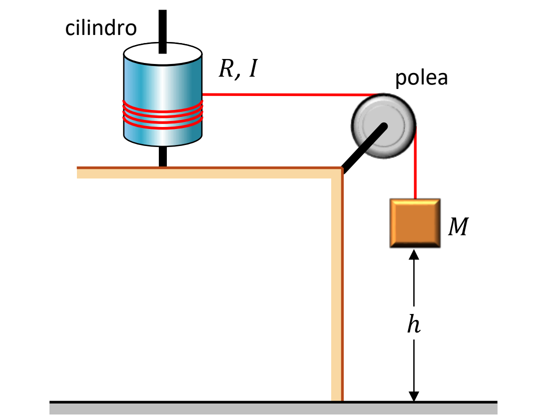


Figura del ejercicio 12

Ejercicio 12 (examen 1997)

Un bloque de masa M pende de un hilo inextensible y sin masa, arrollado a un cilindro de momento de inercia I y radio R, pasando por una polea de masa despreciable. El sistema parte del reposo, cuando el bloque está a una altura h del suelo y el hilo se desenrolla, sin deslizar sobre el cilindro.

a) ¿Qué ángulo debe girar el cilindro para que la masa llegue al suelo?

b) ¿Cuál es la velocidad de la masa M justo antes de llegar al piso?

c) Si la polea tuviera una masa $m = M/3$ y radio $R/3$, ¿cómo cambiaría el resultado de la parte b?

Ejercicio 13

El disco 1 de la figura, homogéneo de radio R y masa M rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Sobre él está enrollada una cuerda ideal que pasa sin deslizar sobre el disco 2, idéntico al primero. El disco 2 puede girar libremente alrededor de un eje fijo por su centro. En el extremo sin enrollar de la cuerda se encuentra un bloque de masa M, inicialmente a una altura $2R$ por encima del suelo. Si el sistema parte del reposo, calcula la velocidad angular del disco 1 justo antes de que el bloque toque el piso.

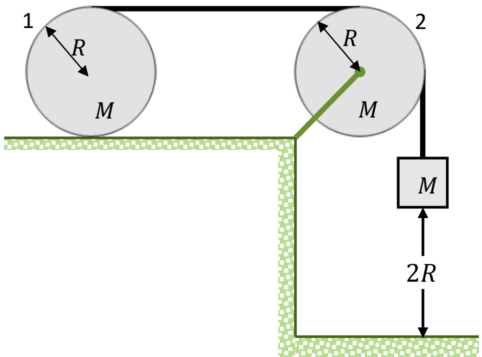


Figura del ejercicio 13

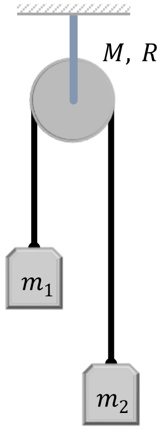


Figura del ejercicio 14

Ejercicio 14 (TM, ejercicio 9.79)

Una máquina de Atwood tiene dos cuerpos de masas $m_1 = 500$ g y $m_2 = 510$ g unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin fricción en el eje, como se muestra en la figura. La polea es un disco uniforme de masa $M = 50$ g y radio $R = 4$ cm. La cuerda no se desliza sobre la polea.

a) Halla la aceleración de las masas.

b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda que soporta a m_1? ¿Y la de la cuerda que soporta a m_2? ¿En cuánto difieren?

c) ¿Cuáles serían las respuestas si se desprecia la masa de la polea?

Ejercicio 15 (parcial 2003)

Un cilindro uniforme de masa M y radio R tiene enrollado un hilo delgado a su alrededor. El hilo se desenrolla bajo la acción de una fuerza constante F, como se muestra en la figura. El cilindro rueda sin deslizar sobre la superficie horizontal, mientras que el hilo no desliza sobre el cilindro. Calcula la fuerza de rozamiento ejercida sobre el cilindro.

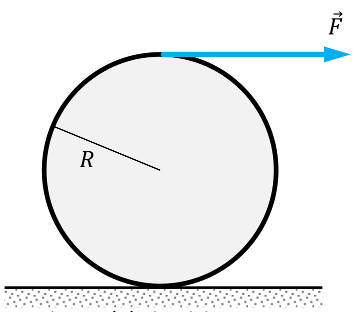


Figura del ejercicio 15

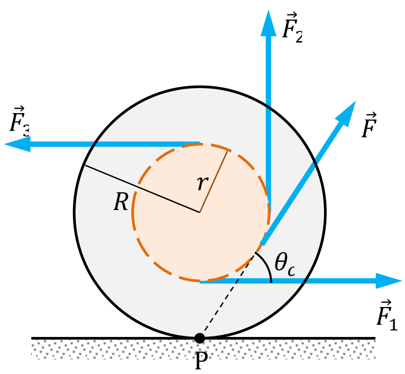


Figura del ejercicio 16

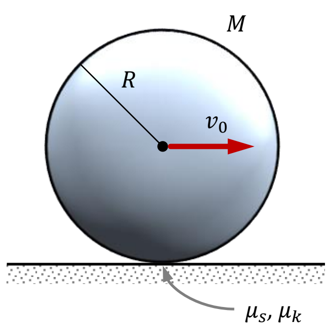


Figura del ejercicio 17

Ejercicio 16

a) La figura muestra un carrete que descansa sobre una superficie horizontal[2]. El carrete está formado por la unión de dos discos de radio R y un cilindro de radio r. El carrete tiene masa total M y un momento de inercia I alrededor del eje horizontal que pasa por su centro. Cuando se tira del alambre, el carrete no desliza. En intentos independientes, se tira del cilindro con fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, y $\vec{F}_3$ como se muestra en la figura. Determina, Para cada caso, la dirección en que rueda el carrete y la aceleración de su centro.

b) En forma más general, se puede tirar del cilindro con una fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo variable θ con la horizontal. Muestra que para que el carrete *no ruede y permanezca estacionario*, la línea de acción de $\vec{F}$ debe pasar por el punto de apoyo P, formando un ángulo crítico $\theta = \theta_c$ con la horizontal que cumple $\cos\theta_c = r/R$.

Ejercicio 17

a) Una esfera homogénea maciza de masa M y radio R se halla sobre una superficie horizontal rugosa, con coeficientes de fricción estático y cinético μ_s y μ_k, respectivamente. Inicialmente, la velocidad angular de la esfera es nula y la rapidez del centro de masa vale $v_0 = 10$ m/s. A partir del tiempo $t = 5$ s, el rígido rueda sin deslizar. ¿Cuánto vale el coeficiente de fricción dinámica μ_k?

b) Considera una situación inicial como en el caso anterior, pero esta vez con esfera descendiendo por una superficie inclinada un ángulo de 45° con la horizontal.

   i) Encuentra la aceleración del centro de la esfera y su aceleración angular en el intervalo durante el cual hay deslizamiento.

   ii) Asumiendo que la superficie es suficientemente larga, ¿deja de deslizar la esfera a partir de algún momento? En caso afirmativo, ¿qué aceleración tendría su centro?

Ejercicio 18 (SB ejercicio 11.51)

Una esfera sólida de masa m y radio r rueda sin deslizar a lo largo de la pista que se muestra en la figura. Si la esfera parte del reposo con su punto más bajo a una altura h respecto al punto más bajo del rizo de radio R,

a) ¿cuál es el valor mínimo de h (en función de R) para que la esfera complete la trayectoria del rizo?

b) ¿Cuánto valen las fuerzas sobre la esfera cuando pasa por el punto P si $h = 3R$?

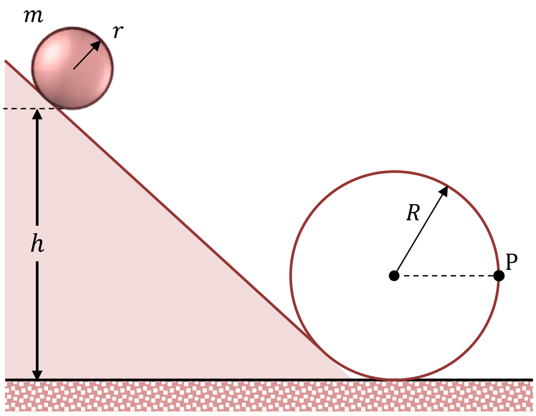
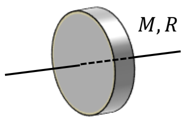
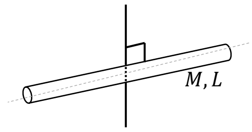
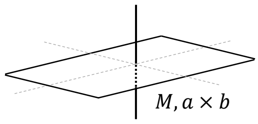
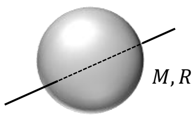
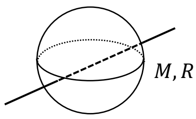
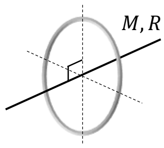


Figura del ejercicio 18

[2] En la página del curso hay un video que muestra estas situaciones: https://tinyurl.com/TorqueCarrete

Momentos de inercia de algunos cuerpos homogéneos

Los cuerpos tienen masa M. El momento I_{cm} se calcula respecto a un eje por su centro de masa

Disco o cilindro macizo de radio R, eje perpendicular a la base	$I_{\text{cm}} = \dfrac{MR^2}{2}$	
Barra delgada de largo L, eje perpendicular a la barra	$I_{\text{cm}} = \dfrac{ML^2}{12}$	
Placa rectangular de lados a y b	$I_{\text{cm}} = \dfrac{M}{12}(a^2 + b^2)$	
Esfera maciza de radio R	$I_{\text{cm}} = \dfrac{2MR^2}{5}$	
Esfera hueca de pared delgada y radio R	$I_{\text{cm}} = \dfrac{2MR^2}{5}$	
Aro delgado o **cilindro hueco** de radio R, eje perpendicular a su plano	$I_{\text{cm}} = MR^2$	
Aro delgado de radio R, eje paralelo a su plano	$I_{\text{cm}} = \dfrac{MR^2}{2}$