Topografía Planimétrica

Métodos de relevamiento topográfico (Planimetría)

Docentes del curso: Gracia Micaela; Mamrut Alberto; Martinez Magali; Wainstein Martin.

INSTITUTO DE AGRIMENSURA
FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Fecha 1er Semestre 2025 – Martin Wainstein

Radiación

Este método es empleado cuando el área de trabajo está comprendida dentro del alcance del instrumental.

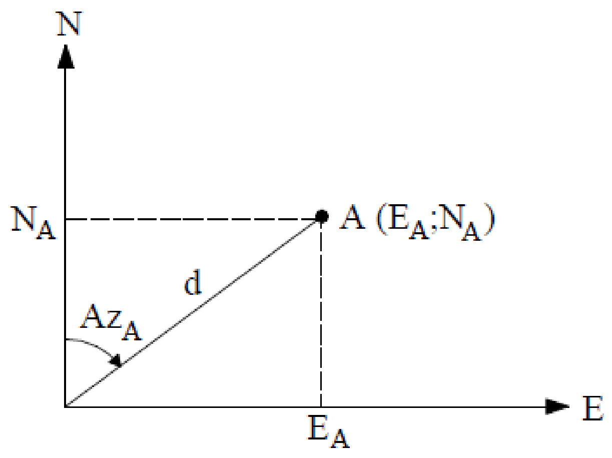
Consiste en, desde un sólo punto estación, medir el ángulo a partir de una dirección origen, y la distancia desde ésta al punto considerado.

El instrumento se dice que está orientado, cuando el origen angular se define según una dirección conocida.

La distancia desde el punto de estación y el punto a relevar se obtiene mediante mediciones con cinta o electrónicamente (medida directa).

Cada punto queda así definido mediante coordenadas polares, pudiendo transformarse a coordenadas rectangulares mediante:

$$E_A = d_A * \text{sen } Az_A$$
$$N_A = d_A * \cos Az_A$$



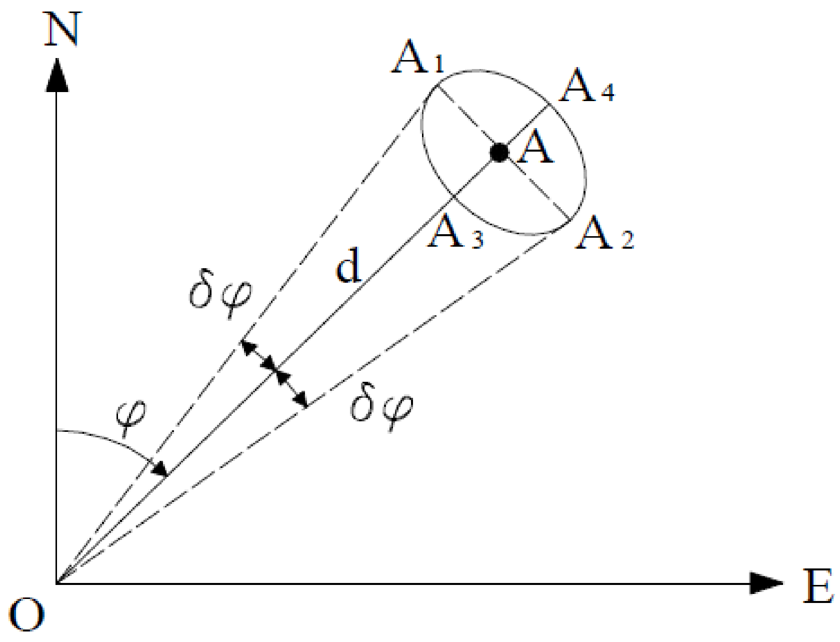
Radiación

El mayor inconveniente que tiene el método es precisamente su falta de homogeneidad en cuanto a la precisión, pues ésta decrece a medida que aumenta la distancia del punto a la estación.

$$X_a = X_b + d_{ab} \times \sin Az_{ab}$$
$$Y_a = Y_b + d_{ab} \times \cos Az_{ab}$$

$$\partial Xa^2 = \left(\frac{\partial_{Xa}}{\partial_d}\right)^2 \times \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial_{Xa}}{\partial_\varphi}\right)^2 \times \sigma_\varphi^2$$
$$\partial Ya^2 = \left(\frac{\partial_{Ya}}{\partial_d}\right)^2 \times \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial_{Ya}}{\partial_\varphi}\right)^2 \times \sigma_\varphi^2$$

$$\partial_{Xa}^2 = \left(\sin Az_{ab} \times \sigma_d\right)^2 + \left(d \times \cos Az_{ab} \times \sigma_\varphi\right)^2$$
$$\partial_{Ya}^2 = \left(\cos Az_{ab} \times \sigma_d\right)^2 + \left(-d \times \sin Az_{ab} \times \sigma_\varphi\right)^2$$



Considerando un error angular de 7´´ y un error en distancia de 2mm+2ppm (error de estación 407).
Calcular el error al medir un ángulo de 45° a una distancia de 50m. Y compararlo con el error al medir un ángulo de 145° a una distancia de 500m

Radiación – Análisis de errores

Incidencia de falta de verticalidad del bastón de prisma:

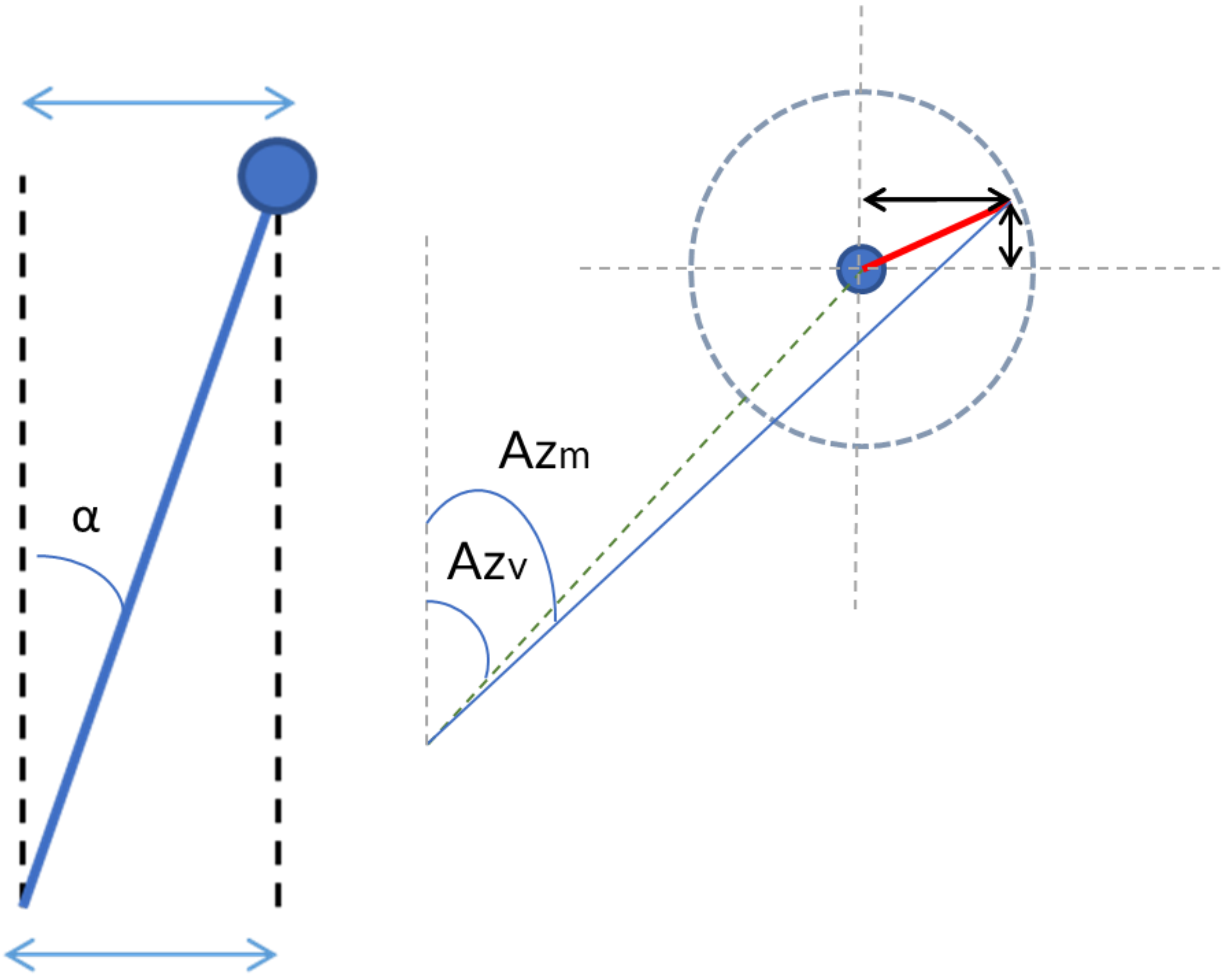
La falta de verticalidad del bastón genera un desplazamiento de la proyección del punto en coordenadas (x,y) en función del ángulo y de la altura del bastón.

El vector de desplazamiento será:

$$\varepsilon_{proy} = H_b \times \sin\alpha$$

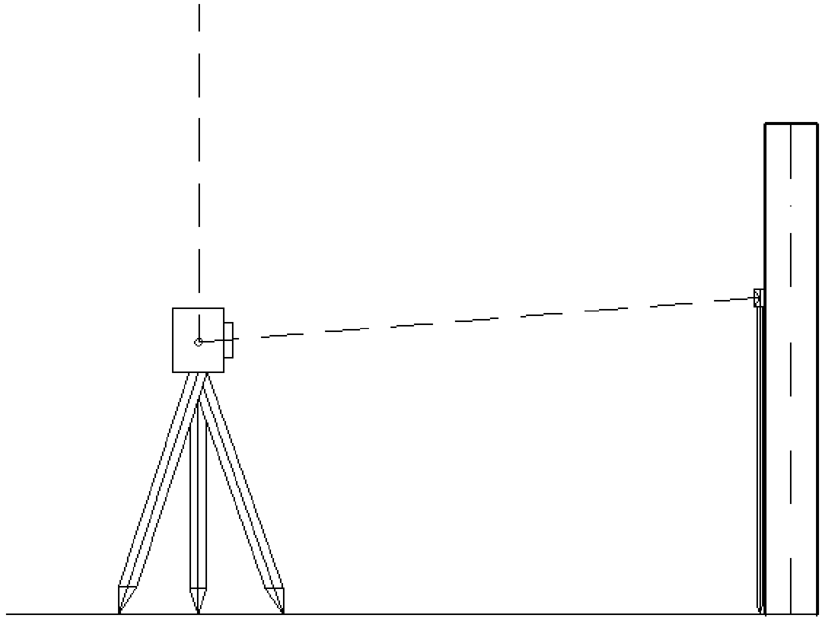
Siendo Hb la altura del bastón y α la inclinación del bastón.

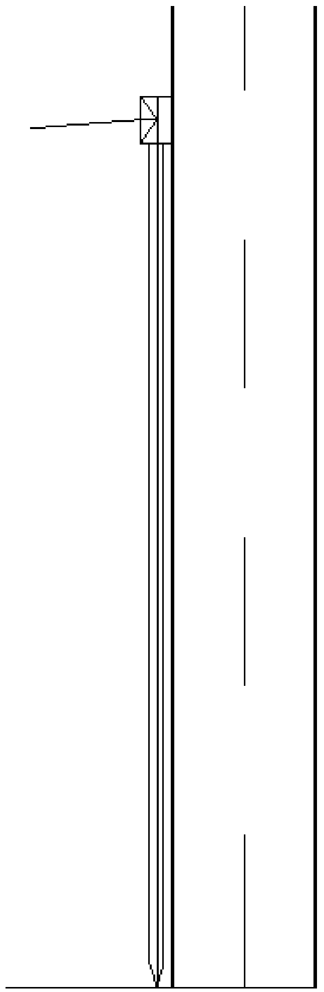
Por ser un error radial, será máximo en la distancia en el sentido de la dirección y máximo en el error angular en el sentido perpendicular a la dirección. En ambos casos 45°



Radiación – Análisis de errores

Medición directa de la distancia

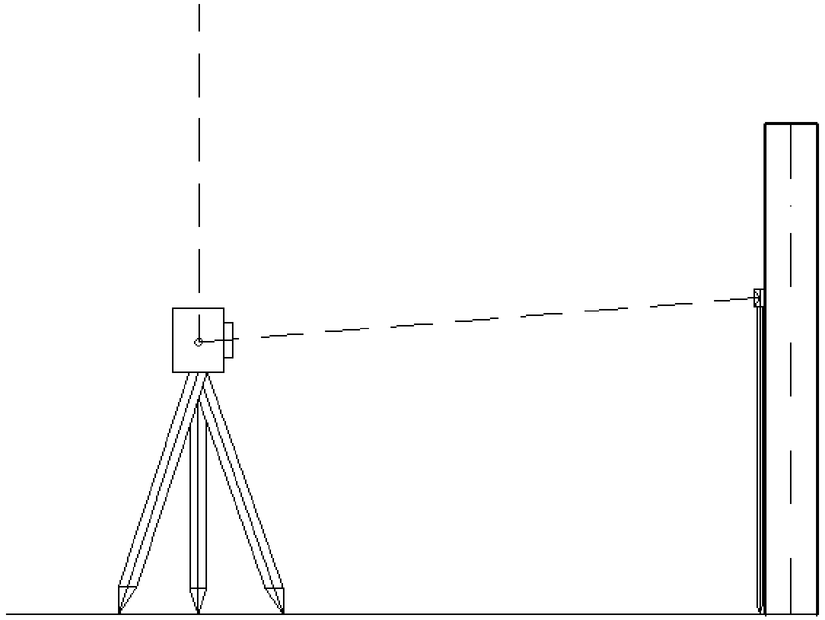


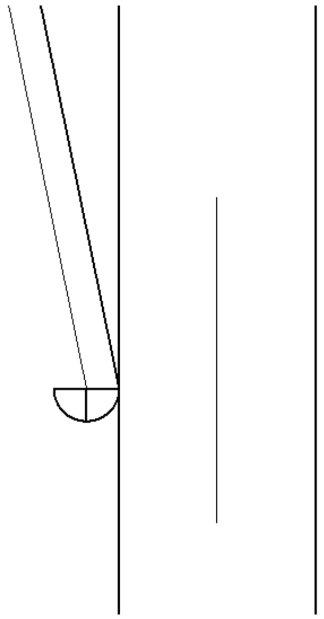


Generalmente a la distancia se le debe sumar la mitad del ancho de prisma

Radiación – Análisis de errores

Medición “sesgada” de la distancia



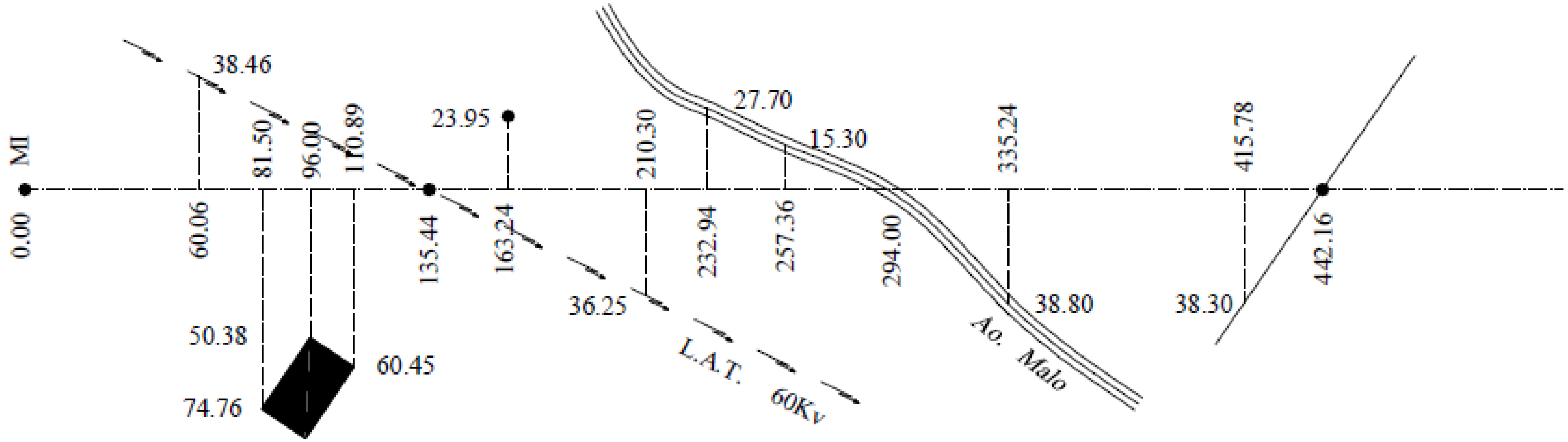


En caso de medidas sesgadas, se recomienda medir la distancia al centro del prisma y el ángulo al borde del mismo, de esta manera se minimiza la diferencia de distancias con respecto a medir distancia y ángulo al centro del prisma.

Abscisas y ordenadas

Se emplea este método en general cuando la zona en cuestión abarca una gran extensión en un sentido y muy pequeña en la dirección normal a ésta.

Para ello se determina una alineación base sobre la cual se miden las distancias acumuladas (progresivas) a partir de un punto tomado como origen, y luego se miden los apartamientos (ordenadas) de los puntos de interés a dicha alineación.



Abscisas y ordenadas

Se define una línea base o eje de referencia, por ejemplo el eje de una carretera, una línea al alta tensión, una via férrea, etc.

A lo largo de esa línea se marcan estaciones o puntos de control (con coordenadas conocidas o distancias medidas)

Desde esos puntos, se miden abscisas (distancias longitudinales sobre el eje) y ordenadas (distancias perpendiculares al eje) hacia los detalles laterales (arbolado, construcciones, bordes, etc.)

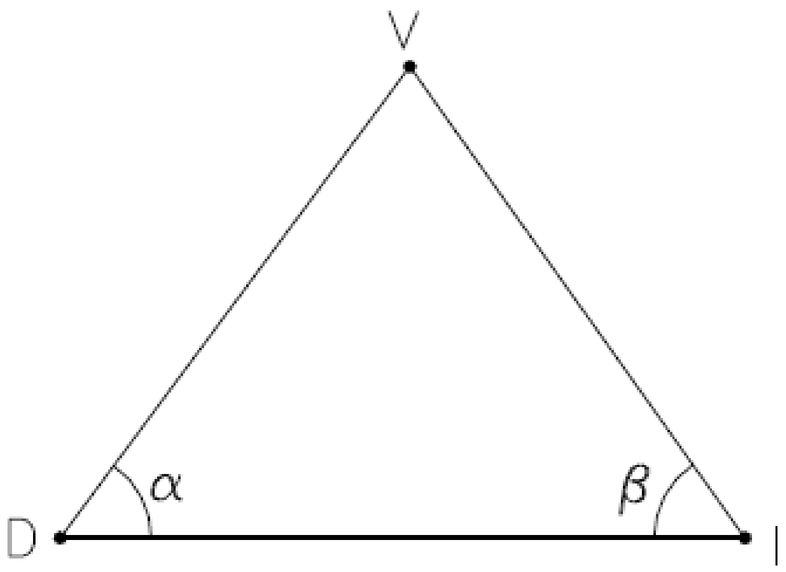
¿Otras aplicaciones?

Intersección directa

Es un procedimiento muy usado en mediciones geodésicas y operaciones topográficas.

Se basa en la determinación de una base DI cuya longitud y acimut son conocidos, se estaciona luego el teodolito en los extremos y se miden los ángulos que forman con la base las visuales al punto V cuyos datos se quieren obtener.

En el triángulo VDI se conocerán pues un lado (la base) y los dos ángulos adyacentes por lo que el mismo queda perfectamente definido.



$$\hat{V} = 180° - \alpha - \beta$$

$$\frac{a}{\sin D} = \frac{b}{\sin I} = \frac{c}{\sin V}$$

$$a = \frac{c \times \sin D}{\sin V}$$

$$b = \frac{c \times \sin I}{\sin V}$$

$$X_V = X_D + b \times \sin(Az_{DI} - \alpha)$$

$$Y_V = Y_D + b \times \cos(Az_{DI} - \alpha)$$

Intersección directa

Realizando propagación de errores

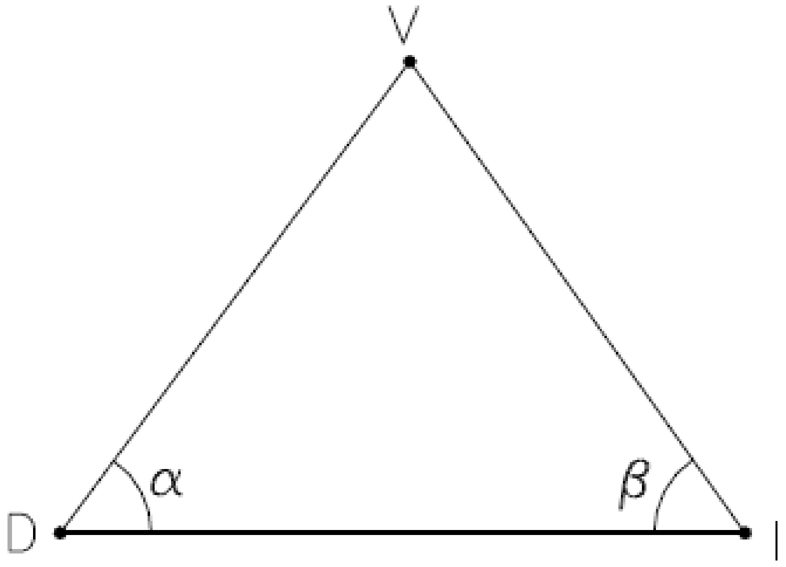
$$X_V = X_D + b \times \sin(Az_{DI} - \alpha)$$
$$Y_V = Y_D + b \times \cos(Az_{DI} - \alpha)$$

$$\Rightarrow$$

$$X_V = X_D + \frac{c \times \sin\beta}{\sin\gamma} \times \sin(Az_{DI} - \alpha)$$
$$Y_V = Y_D + \frac{c \times \sin\beta}{\sin\gamma} \times \cos(Az_{DI} - \alpha)$$

$$\sin\gamma = \sin(180° - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\partial X_V^2 = \left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_\alpha}\right)^2 \times \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_\beta}\right)^2 \times \sigma_\beta^2 + \left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_{AZ}}\right)^2 \times \sigma_{AZ}^2$$
$$\partial Y_V^2 = \left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_\alpha}\right)^2 \times \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_\beta}\right)^2 \times \sigma_\beta^2 + \left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_{Az}}\right)^2 \times \sigma_{AZ}^2$$



Se debe tener especial cuidado en la determinación del vértice V (puntería) y en la geometría del triangulo.

Intersección directa

Realizando propagación de errores

$$\left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_c}\right) = \frac{\sin\beta\,\sin(Az-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_{Az}}\right) = \frac{c\times\sin\beta\,\cos(Az-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

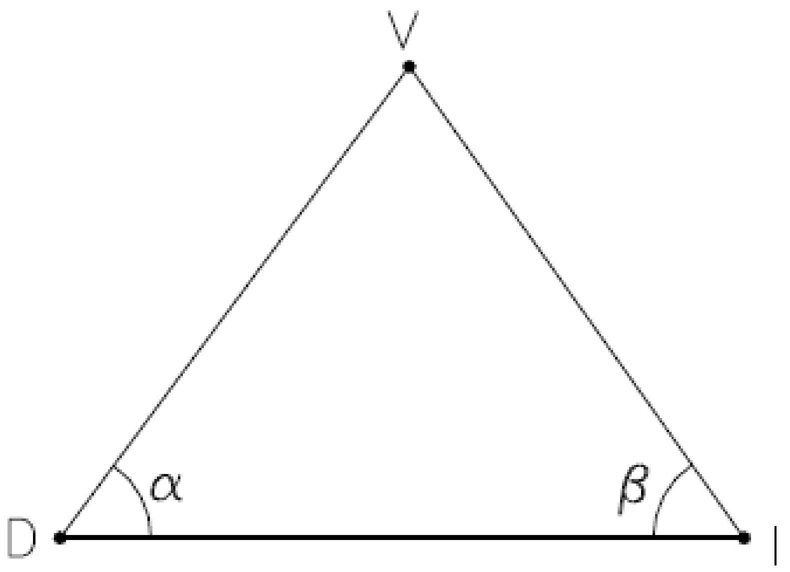
$$\left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_\alpha}\right) = -\left[\frac{c\times sin\beta\times(\cos(\alpha-Az)\times\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-Az)\times\cos(\alpha+\beta)}{sin^2_{(\alpha+\beta)}}\right]$$

$$\left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_\beta}\right) = \frac{c\times\sin(Az-\alpha)\times(\cos\beta\times\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\times\cos(\alpha+\beta))}{sin^2_{(\alpha+\beta)}}$$

$$\left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_c}\right) = \frac{\sin\beta\,.\cos(Az-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_{Az}}\right) = -\frac{c\times\sin\beta\,\sin(Az-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_\alpha}\right) = -\frac{c\times\sin\beta\times(\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-Az)+\cos(\alpha-Az)\cos(\alpha+\beta))}{sin^2_{(\alpha+\beta)}}$$

$$\left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_\beta}\right) = \frac{c\times\cos(Az-\alpha)\times(\cos\beta\times\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\times\cos(\alpha+\beta))}{sin^2_{(\alpha+\beta)}}$$



Trilateración

El empleo de este método se ha incentivado y ha tenido gran impulso a partir del surgimiento de los instrumentos electrónicos de medidas de distancias, que permiten medir grandes longitudes en un breve lapso de tiempo y con gran precisión.

Consiste como lo dice su nombre, en medir los 3 lados de un triángulo, con lo que el problema queda resuelto, aplicando luego las fórmulas de la trigonometría:

Por la ley del coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

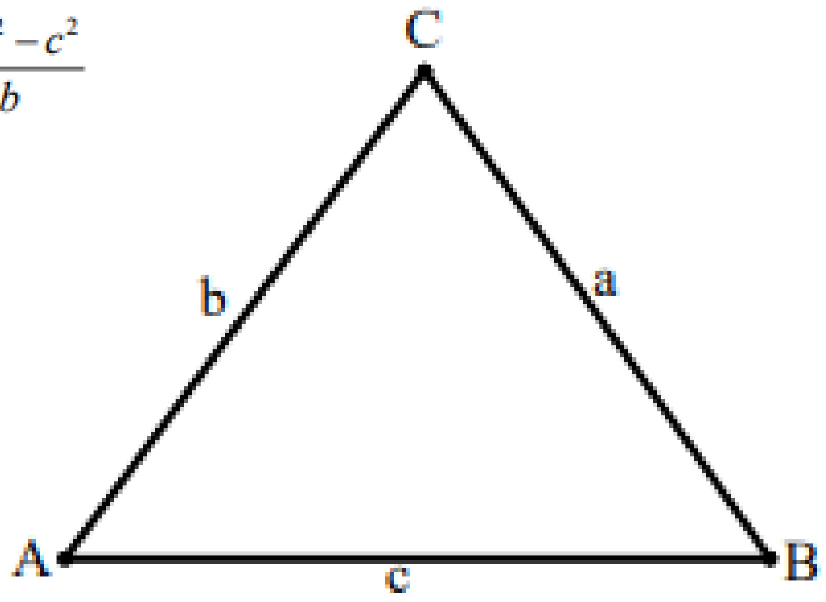
O también :

$$tg\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

donde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$



Trilateración

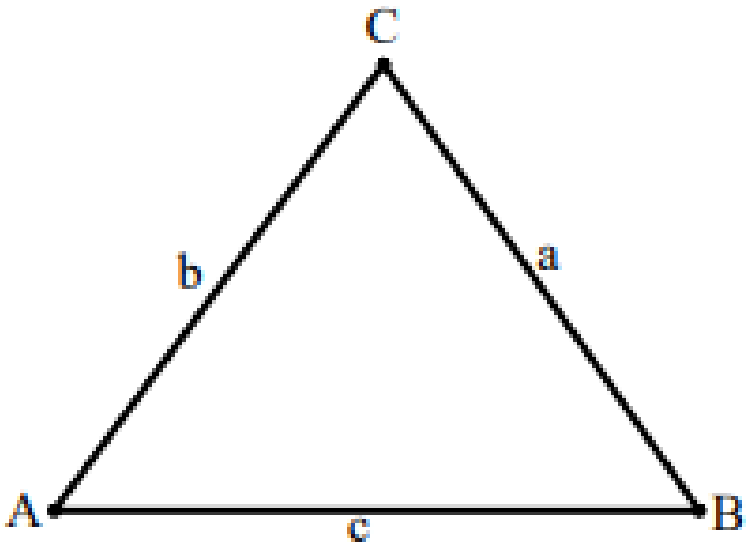
Partiendo de coordenadas (Xa,Ya) del punto A conocidas, se puede obtener las coordenadas del punto C (Xc,Yc) siempre y cuando conozcamos el Az(AC).

$$X_C = X_A + b \times \sin Az_{AC} \qquad X_B = X_A + c \times \sin Az_{AB}$$

$$Y_C = Y_A + b \times \mathrm{Cos}\, Az_{AC} \qquad Y_B = Y_A + c \times \mathrm{Cos}\, Az_{AB}$$

$$Az_{AB} = Az_{AC} + \hat{A}$$

$$\hat{A} = Arc\cos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$



Si consideramos la dirección AC como origen angular, el Az(AC) = 0 (simplificación para el cálculo de error)

Entonces el error en la determinación de las coordenadas del punto B será en función del error en la medición de los 3 lados del triángulo (a,b,c).

$$\partial X_B^2 = \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_b}\right)^2 \times \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2 + \cancel{\boxed{\left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_{AZ}}\right)^2 \times \sigma_{AZ}^2}}$$

$$\partial Y_B^2 = \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_b}\right)^2 \times \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2 + \cancel{\boxed{\left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_{Az}}\right)^2 \times \sigma_{AZ}^2}}$$

Trilateración

Desarrollando las ecuaciones

$$\partial X_B^2 = \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_b}\right)^2 \times \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2$$

$$\partial Y_B^2 = \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_b}\right)^2 \times \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2$$

$$\frac{\partial_{XB}}{\partial b} = -\left(\frac{b^4 - c^4 + 2a^2c^2 - a^4}{4cb^3\sqrt{1 - \left(\frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}\right)}}\right)$$

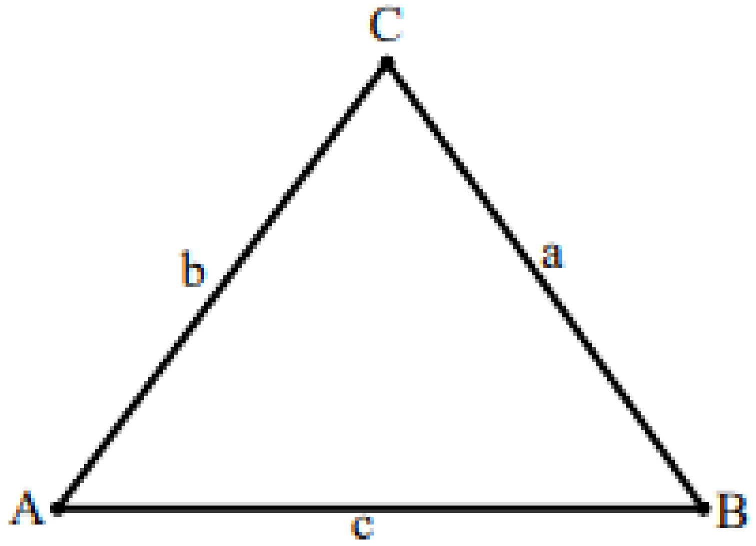
$$\frac{\partial_{XB}}{\partial a} = \frac{a(-a^2 + c^2 + b^2)}{2b^2c\sqrt{1 - \frac{(-a^2 + c^2 + b^2)^2}{4b^2c^2}}}$$

$$\frac{\partial_{XB}}{\partial c} = -\frac{c^2 - b^2 - a^2}{2b^2\sqrt{1 - \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}}}$$

$$\frac{\partial_{YB}}{\partial b} = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b^2}$$

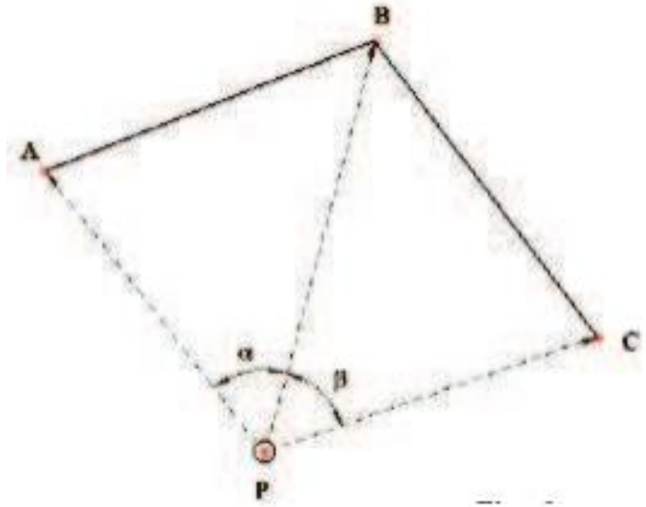
$$\frac{\partial_{YB}}{\partial a} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{\partial_{YB}}{\partial c} = \frac{c}{b}$$



Intersección inversa

El Método consiste en la determinación de la posición planimétrica de puntos, mediante observaciones angulares hechas desde éstos y dirigidas a otros puntos de coordenadas conocidas.
Es necesario realizar al menos visuales a tres puntos de posición conocida.



La obtención de las coordenadas X e Y que definan la posición planimétrica de los puntos, puede hacerse por métodos gráficos o por métodos analíticos.

El caso más general, es el que se observa en la Figura. Se tienen tres puntos A, B, C, de posición planimétrica conocida y se pretende calcular la posición de un punto P, estacionando en él con un Teodolito o Estación Total y midiendo exclusivamente los ángulos α y β .

El problema tendrá solución siempre que el punto P no se encuentre en la llamada "circunferencia peligrosa" que determinan los puntos A, B y C, ya que los tres arcos capaces se confundirían en uno solo.

Cuando el punto P está en esta circunferencia, el cuadrilátero PABC es inscrito y se cumple que:
$B + \alpha + \beta = 180°$. En todo cuadrilátero inscrito, los ángulos opuestos son suplementarios.

Intersección inversa

SOLUCIÓN GEOMÉTRICA (Intersección de Arcos Capaces)

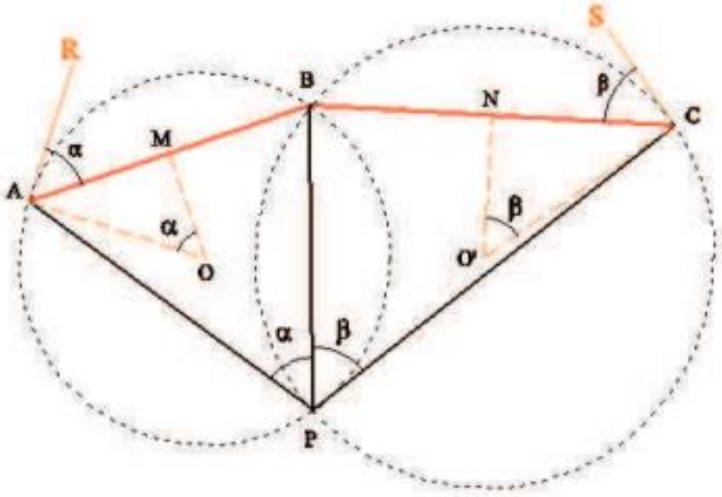
El método consiste en la construcción del arco capaz de segmento AB y ángulo α y el arco capaz de segmento BC y ángulo β. La intersección de estos será el punto P a determinar.

Para esto es necesario obtener los centros de las circunferencias que pasan por los puntos A,B,P y B,C,P. Para ello trazaremos las mediatrices de los lados AB (M) y BC (N).

Trazaremos la recta AR que forma el ángulo α con el lado AB, y una perpendicular a AR que pasaría por O para obtener el centro del círculo por intersección. Haremos lo mismo con el lado BC. Obtenemos los centros O y O', y trazando los círculos de radios OA y O'C, pasarán por B y P, siendo P la solución buscada.

Intersección inversa

SOLUCIÓN GEOMÉTRICA (Intersección de Arcos Capaces)



El método consiste en la construcción del arco capaz de segmento AB y ángulo α y el arco capaz de segmento BC y ángulo β. La intersección de estos será el punto P a determinar.

*El **arco capaz** es el lugar geométrico de los vértices P de los ángulos APB que tienen la misma amplitud. El arco capaz de ángulo γ de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos P tales que $\widehat{APB} = \gamma$ y son exclusivamente dos arcos de circunferencia, uno a cada lado del segmento AB, ambos puntos se incluyen uniendo dichos arcos.*

Para esto es necesario obtener los centros de las circunferencias que pasan por los puntos A,B,P y B,C,P. Para ello trazaremos las mediatrices de los lados AB (M) y BC (N).

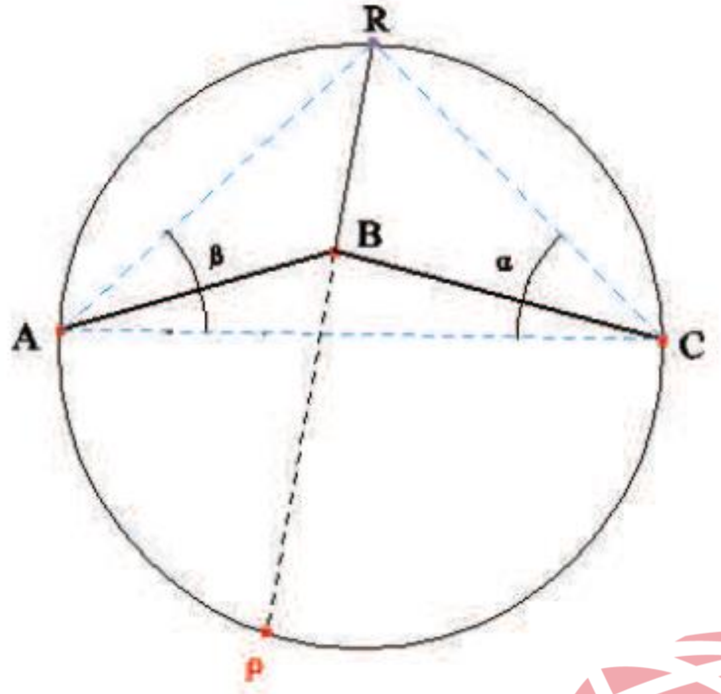
Trazaremos la recta AR que forma el ángulo α con el lado AB, y una perpendicular a AR que pasaría por O para obtener el centro del círculo por intersección. Haremos lo mismo con el lado BC. Obtenemos los centros O y O', y trazando los círculos de radios OA y O'C, pasarán por B y P, siendo P la solución buscada.

Intersección inversa

SOLUCIÓN GEOMÉTRICA **(Método de Collins)**

Sean A, B y C los tres vértices de coordenadas conocidas y P el punto que queremos determinar por Intersección Inversa. Medimos **α** y **β** desde P. Llevando **α** sobre la base CA y **β** sobre la AC como se indica en la Figura, la intersección nos da un punto **R** (punto auxiliar de Collins).

Se traza la circunferencia que pasa por los puntos A,R y C. Uniendo el punto R con el vértice B y prolongando hasta cortar a la circunferencia, se obtiene el punto P buscado.



*La justificación del método se fundamenta en que desde el vértice **R** se mira a la base **AC** con un ángulo **180 -(α + β),** Por tanto desde **P** se verá con un ángulo **α + β.** (propiedad de ángulos suplementarios en cuadriláteros inscriptibles)*

Además, si desde **C** miramos a **AR** con un ángulo **α** también lo miraremos desde **P**, porque son ángulos inscritos sobre la misma cuerda. También desde **P** miramos a **RC** con un ángulo **β,** al igual que desde **A.**

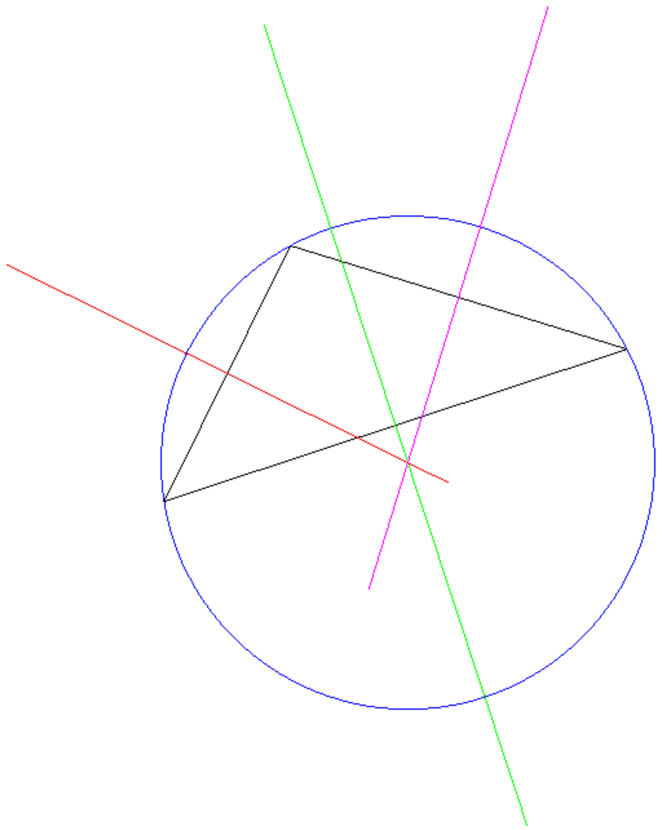
Por todo ello, el punto **P** es pues la solución que buscábamos. El mismo resultado hubiésemos obtenido si en vez de basar toda la construcción sobre la base **AC** lo hubiésemos hecho sobre cualquiera de las otros dos bases.

Intersección inversa

SOLUCIÓN GEOMÉTRICA (Método de Collins)

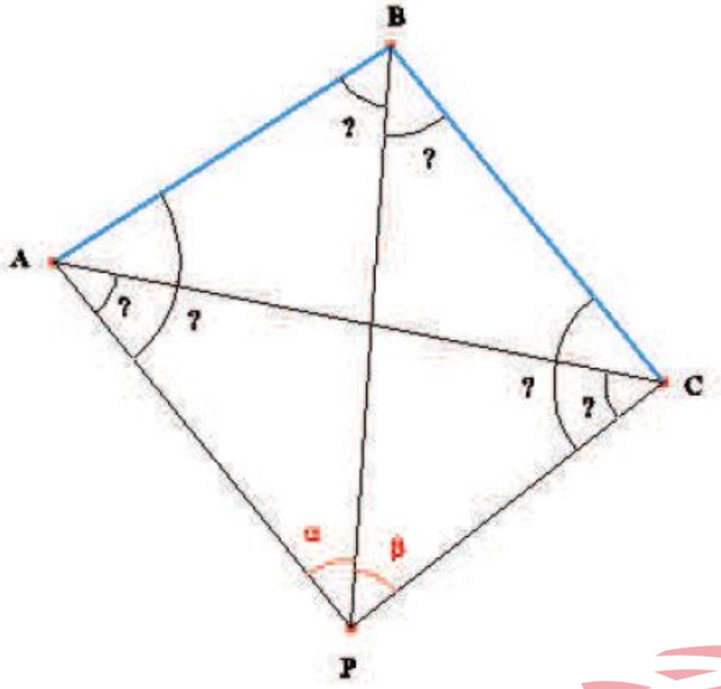
Un problema seria hallar la circunferencia que al que pertenecen los puntos A,C,R y P. O en su defecto A,C,R.

Para eso es necesario trazar las mediatrices de los segmentos AC, AR y RC. El punto en el que se intersectan las 3 mediatrices será el centro de la circunferencia.



Intersección inversa

SOLUCIÓN ANALÍTICA (Método de Pothenot)



Dada la figura, se observa que el problema analítico para la determinación de la posición del punto P radica en que en ninguno de los tres triángulos que se forman, con vértice en P, se conocen dos de sus ángulos.
Sólo se conoce un ángulo y su lado opuesto. Por tanto, no podemos aplicar el teorema del seno en ellos, para deducir sus lados y ángulos. Llamemos "a" y "b" a las distancias AB y BC conocidas, por ser A,B y C puntos de coordenadas también conocidas

Los dos triángulos considerados, tienen una diagonal común PB y el valor de su distancia en cada uno de ellos es:

Triangulo APB $$\frac{PB}{\text{sen } A} = \frac{AB}{\text{sen } \alpha} \longrightarrow PB = a\frac{\text{sen } A}{\text{sen } \alpha}$$

Triangulo BPC $$\frac{PB}{\text{sen } C} = \frac{BC}{\text{sen } \beta} \longrightarrow PB = b\frac{\text{sen } C}{\text{sen } \beta}$$

$$\longrightarrow \frac{\text{senC}}{\text{senA}} = \frac{a}{b}\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha} = constante,$$

a y b son distancias conocidas,
α y β se miden en campo

Intersección inversa

SOLUCIÓN ANALÍTICA (Método de Pothenot)

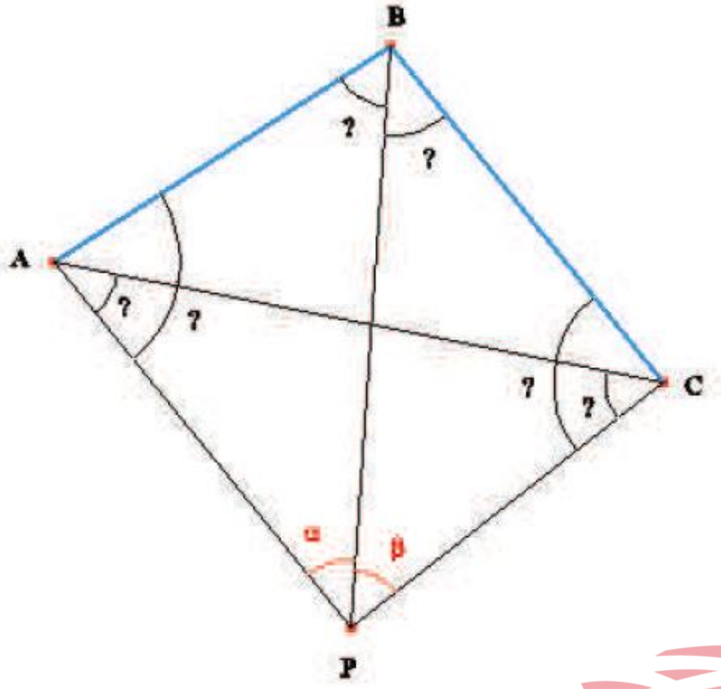
$$\frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, A} = k$$

A+C = Z (valor conocido) Luego C = Z - A.

$$\frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, A} = \frac{\text{sen}(Z - A)}{\text{sen}\, A} = \frac{\text{sen}\, Z \cos A - \cos Z\, \text{sen}\, A}{\text{sen}\, A} = \text{sen}\, Z \cot A - \cos Z = K(\textit{conocido})$$

$$\cot A = \frac{K + \cos Z}{\text{sen}\, Z}$$

$$\boxed{\mathbf{A = arctg}\left(\frac{\mathbf{senZ}}{\mathbf{K + cosZ}}\right) \qquad \mathbf{C = Z - A}}$$



Conocidos A y C, el problema está resuelto. En efecto, del triángulo APB se deduce:

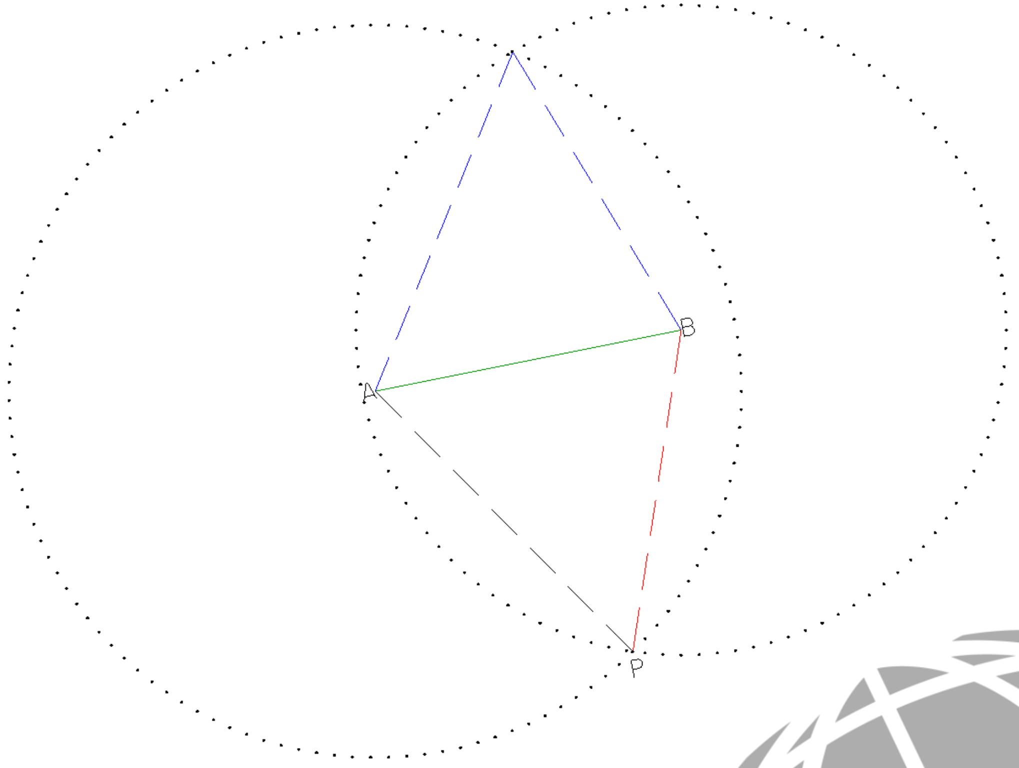
$$\left.\begin{aligned} \theta_A^P &= \theta_A^B + \hat{A} \\ AP &= a\frac{\text{sen}(A + \alpha)}{\text{sen}\, \alpha} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} X_P &= X_A + AP\, \text{sen}\, \theta_A^P \\ Y_P &= Y_A + AP \cos \theta_A^P \end{aligned}\right\}$$

“Estación libre” o Trisección

La aplicación o método consiste en determinar las coordenadas del punto P conociendo al menos 2 puntos con coordenadas conocidas.

Para ello es necesario medir las distancias PA, PB y las lecturas angulares en ambas direcciones.

Las coordenadas de P se obtienen mediante la intersección de 2 circunferencias de centro A y radio PA y de centro B y radio PB. Dicha intersección da 2 soluciones posibles, la ambigüedad se resuelve con la lectura angular de los puntos.



El punto P puede estar de un lado u el otro según la lectura angular del limbo graduado.

El error en la determinación de P viene dado en función del error de la medición de distancias PA y PB

¡Gracias!

Prof.Micaela Gracia micaelag@fing.edu.uy
Prof. Alberto Mamrut amamrut@fing.edu.uy
Prof. Magali Martinez Núñez magalim@fing.edu.uy
Prof. Martín Wainstein martinw@fing.edu.uy

INSTITUTO DE AGRIMENSURA
FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

ia_fing_udelar

ia_fing_udelar

www.fing.edu.uy/es/ia