Parcial - Funciones de Variable Compleja

10 de mayo de 2025

1. **Ejercicio 1**

   (a) Sea $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una transformación de Möbius. Probar que $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ si y sólo si existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que
   $$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,.$$

   (b) Se considera la transformación de Möbius
   $$T(z) = \frac{iz - 3i}{8iz - i}\,.$$
   Probar que esta transformación verifica $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. ¿Por qué esta transformación no contradice la parte (a) del ejercicio?

2. **Ejercicio 2**

   (a) Dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq b$, determinar el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $(z - a)(z - b)$ es un número real negativo.

   (b) Hallar una primitiva en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ de la función
   $$f(z) = \frac{1}{(z - a)(z - b)}\,.$$

   (c) Sea γ una curva cerrada que no pasa por $[a, b]$. Probar que
   $$\int_\gamma \frac{dz}{z - a} = \int_\gamma \frac{dz}{z - b}\,.$$

   (d) Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$ y $U \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$ un abierto conexo. Probar que para todo par de puntos $z, w \in U$ existe una poligonal que une z a w contenida en U.

   (e) Concluir que si $z, w \in U$ entonces $\eta(\gamma, z) = \eta(\gamma, w)$.

3. **Ejercicio 3**

   (a) Hallar los polos y residuos de la función

   $$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,.$$

   (b) Sea Γ_R el arco de circunferencia de centro 0 y radio R contenido en el semiplano superior. Probar que

   $$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0\,.$$

   (c) Calcular

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx\,.$$

SOLUCIONES

1.a Si $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, entonces es claro que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $T(x) \in \mathbb{R}$. La condición es entonces suficiente. Para ver que la condición es necesaria, vamos a suponer que T está definida por cuatro números complejos $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$, es decir

$$T(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\,.$$

Para simplificar, si $\gamma \neq 0$, podemos simplificar dividiendo los coeficientes por γ, y suponer entonces que $\gamma = 1$, es decir

$$T(z) = \frac{\alpha z+\beta}{z+\delta}\,.$$

Como $T^{-1}(\infty) = -\delta$ debe ser real, resulta que $\delta \in \mathbb{R}$. Por otra parte, $T(0) = \beta/\delta$ es real (o infinito), resulta que $\beta \in \mathbb{R}$ si $\delta \neq 0$. En el caso en que $\delta = 0$, podemos ver que $T(1) = \alpha+\beta$ es real, y que $T(-1) = \alpha-\beta$ es otro real, resultando que α y β son reales. Por otra parte, si $\delta \neq 0$, tomamos $x \neq -\delta$ cualquiera y vemos que $T(x) = (\alpha x+\beta)/(x+\delta)$ es real, de donde se deduce que α también es un número real.

Resta ver que pasa si $\gamma = 0$, es decir cuando la transformación de Möbius es un polinomio de grado 1, es decir cuando $T(\infty) = \infty$. En este caso, $T(z) = \alpha z+\beta$, $T(0) = \beta$ es real, luego $T(1) = \alpha+\beta$ es real, y por lo tanto α es real.

Veamos ahora una prueba más elegante utilizando la siguiente propiedad de las transformaciones de Möbius : Si dos transformaciones de Möbius coinciden en tres puntos, entonces son iguales.

Nuevamente vamos a suponer que T no es un polinomio de grado 1, que como vimos es un caso trivial. Sean $d = T^{-1}(\infty) \in \mathbb{R}$, $b = T^{-1}(0)$ y $a = T^{-1}(1)$. Definimos entonces

$$R(z) = \frac{a-d}{a-b} \cdot \frac{z-b}{z-d}$$

Como $R(d) = \infty$, $R(b) = 0$ y $R(a) = 1$ se tiene que $T = R$, y los coeficientes son reales. En los casos particulares $a = \infty$ o $b = \infty$, basta con definir

$$R(z) = \frac{z-b}{z-d} \quad \text{o} \quad R(z) = \frac{a-d}{z-d} \quad \text{respectivamente.}$$

1.b Dividiendo por i todos los coeficientes se obtiene una expresión para T con todos los coeficientes reales, en particular se tiene que $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2.a Si escribimos $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, y $z = x + iy$ entonces

$$\begin{aligned}(z-a)(z-b) &= ((x-a_1)+i(y-a_2))((x-b_1)+i(y-b_2)) \\ &= ((x-a_1)(x-b_1)-(y-a_2)(y-b_2)) \\ &\quad +i((x-a_1)(y-b_2)+(y-a_2)(x-b_1)) \\ &= \alpha + i\beta\end{aligned}$$

Por lo tanto $(z-a)(z-b)$ es real negativo si y sólo si

$$\alpha = x^2 - y^2 - (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)y + (a_1b_1 - a_2b_2) < 0$$

$$\beta = 2xy - (a_2+b_2)x - (a_1+b_1)y - (a_1b_2 + a_2b_1) = 0$$

2.b Descomponiendo en fracciones simples se obtiene

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

De modo que la primitiva debe ser, módulo una constante la función

$$F(z) = \frac{1}{a-b} \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right).$$

Debemos observar que la función holomorfa log es la rama principal definida para los complejos con argumento en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y la función queda bien definida en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$, ya que para que $(z-a)/(z-b)$ sea real negativo es necesario y suficiente que $z-a$ y $z-b$ tengan direcciones opuestas, es decir que z esté entre a y b, lo cual escribimos $z \in [a,b]$. Otra forma: la transformación de Möbius $T(z) = (z-a)/(z-b)$ verifica $T(a) = 0$, $T(b) = \infty$, y $T(\infty) = 1$, luego la imagen del intervalo abierto (a,b) es exactamente el conjunto de los números reales negativos.

2.c De la parte anterior se deduce que para toda curva cerrada γ que no pase por el intervalo $[a,b]$ se tiene que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} - \int_\gamma \frac{dz}{z-b} = (a-b)\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

2.d Sea $z \in U$ y sea $A = \{\, w \in U \mid \text{hay una poligonal de } z \text{ a } w \text{ contenida en } U \,\}$ y sea $B = U \setminus A$, es decir los puntos a los cuales no se puede acceder por una poligonal. Como U es abierto, todo un entorno de z está contenido en A. También es inmediato, dado que U es abierto, que tanto A como B son abiertos. Luego, dado que U es conexo, debe ser $B = \emptyset$ y $A = U$.

2.e Sean $z, w \in U$ y P una poligonal que los une contenida en U, cuyos vértices son $a_0 = z, a_1, \ldots, a_n = w$. Por la parte (c), resulta que

$$\eta(\gamma, z) = \eta(\gamma, a_0) = \eta(\gamma, a_1) = \ldots = \eta(\gamma, a_n) = \eta(\gamma, w)\,.$$

3.a $f(z)$ presenta dos polos simples en $z = \pm 2i$. Por lo tanto

$$Res(f, 2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{e^{iz}}{z+2i} = \frac{e^{-2}}{4i} = -\frac{1}{4e^2} i$$

$$Res(f, -2i) = \lim_{z \to -2i} \frac{e^{iz}}{z-2i} = \frac{e^{2}}{-4i} = \frac{e^2}{4} i$$

3.b Si $z \in \Gamma_R$, se tiene que $Im(z) \geq 0$, por lo tanto $Re(iz) \leq 0$,

y por lo tanto $\left| e^{iz} \right| \leq 1$. Por otra parte, podemos acotar inferiormente el módulo del denominador en la expresión de f:

$$\left| z^2 + 4 \right| \geq R^2 - 4$$

y se deduce que para $z \in \Gamma_R$ vale la acotación

$$|\, f(z)\, | \leq \frac{1}{R^2 - 4}\,.$$

Luego, dado que la longitud de Γ_R es πR, acotamos la integral:

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma_R} |\, f(z)\, |\, |\, dz\, | \leq \frac{\pi R}{R^2 - 4}\,.$$

La cota obtenida tiende a cero cuando $R \to +\infty$, y consecuentemente también la integral.

3.c

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4}\, dx = \lim_{R \to +\infty} \; Re \left(\int_{[-R,R]} f(z)\, dz \right)$$

Por otra parte, para $R > 4$, sabemos que

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \; Res(f, 2i)$$

De donde concluimos, usando las partes (a) y (b), que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx = \lim_{R\to+\infty} Re\left(\int_{[-R,R]} f(z)\,dz\right) = \frac{\pi}{2e^2}\,.$$