

Supongo que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $f, g \neq 0$ en un entorno de a , f, g derivables en un entorno de a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

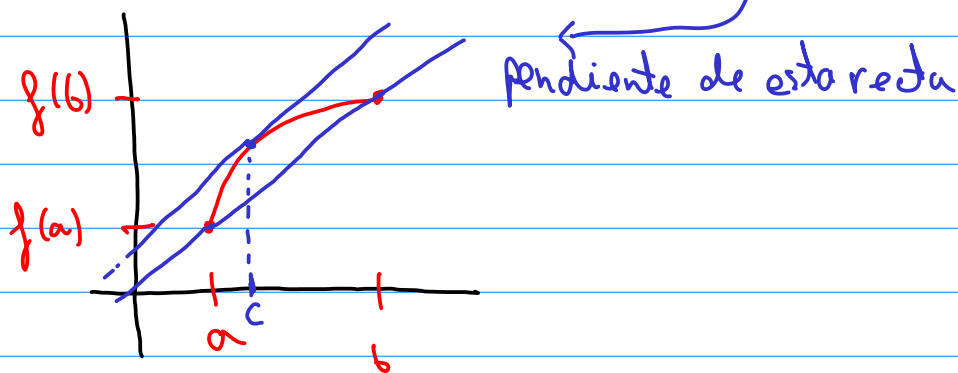
L'Hôpital

Teorema del valor medio

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b)

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Teorema de Rolle (caso particular $f(a) = f(b) = 0$)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, derivable en (a, b)

Si f se anula en a y b entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

3. a) $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$
 f es continua $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$

Tengo que encontrar $c \in (1, 3)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$f(1) = 2, \quad f(3) = \frac{10}{3}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Tengo que resolver $1 - \frac{1}{c^2} = \frac{\frac{10}{3} - 2}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

b) $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x \cdot \log(x)$

Estamos en las hipótesis.

$$f(1) = 0$$

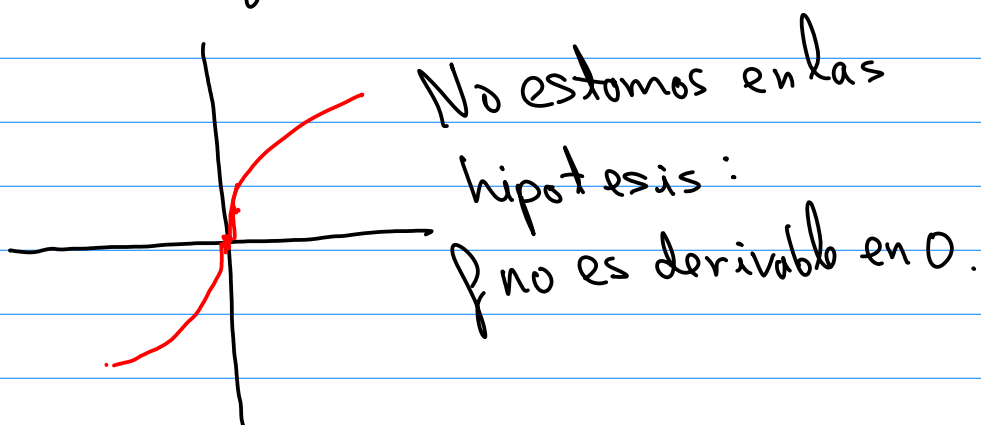
$$f(e) = e$$

$$f'(x) = \log(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \log(x) + 1$$

$$\log(c) + 1 = \frac{e - 0}{e - 1} = \frac{e}{e - 1}$$

$$\Rightarrow \log(c) = \frac{e}{e - 1} - 1 = \frac{1}{e - 1} \quad | \Rightarrow \quad c = e^{\frac{1}{e - 1}}$$

c) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$



4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

$$f(1) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

f' no se anula en $(-1, 1)$

No estamos en las hipotesis de Rolle:

f no es derivable en 0

$$f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0 \quad \forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Si $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = L$, entonces f es derivable en 0 y $f'(0) = L$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} f \text{ continua en } \mathbb{R} \\ f \text{ derivable en } \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{array}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f continua y derivable en $\mathbb{R}$

No cumple $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$

Prueba $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

Quiero ver que existe y es L

$$x > 0 \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} c_x = 0$$

f continua en $[0, x]$ $\Rightarrow \exists c_x \in (0, x)$ t.q.
 derivable en $(0, x)$ Valor medio

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(c_x) = L$$

$$0 < c_x < x$$

$$\underbrace{0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} c_x \leq 0}_{\text{Alternativa}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} \overset{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \overset{L}{=} L$$

$\uparrow$
L'Hôpital

6.6. Extremos

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

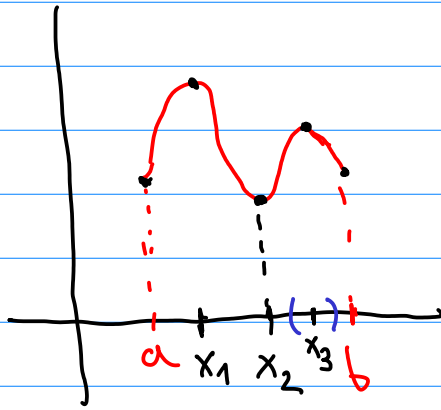
Absolutos

x_0 es un máximo si
 (mínimo)

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\leq)$$

^{mínimo}
 x_0 es un máximo relativo existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) \underset{\leq}{\geq} f(x) \quad \forall x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

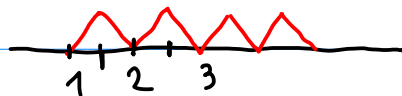


máximo absoluto $\Rightarrow$ máximo relativo

6.6.1. a) $f(x) = |x|$ 0 mínimo abs(y relativo)
 no tiene máximo

b) $\sqrt{|x|}$

c) $[x]$

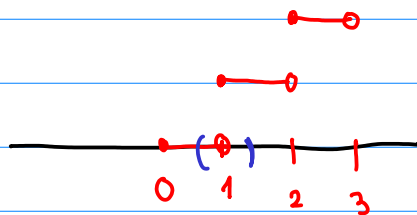


máximos relativos : $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$

mínimo relativos : $\mathbb{Z}$

} son absolutos también.

d) $f(x) = \lfloor x \rfloor$



Mínimos relativos : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Máximos relativos : $\mathbb{R}$

Ninguno es absoluto

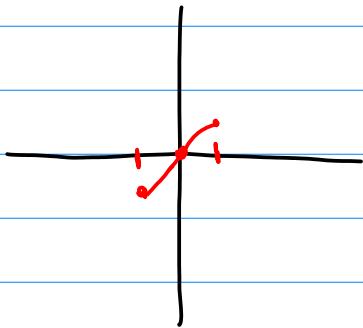
e) $f(x) = \cos(x)$ Máximos^{relativos} : $\{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
 Mínimos relativos : $\{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

f) $f(x) = x^3$ No tiene ninguno
 f es estrictamente creciente

g) $f(x) = x^4 + 1$

Mínimo absoluto en 0

f es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$
 decreciente en $(-\infty, 0)$



$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente
 monótona, entonces no hay
 máximos ni mínimos relativos en (a, b)

