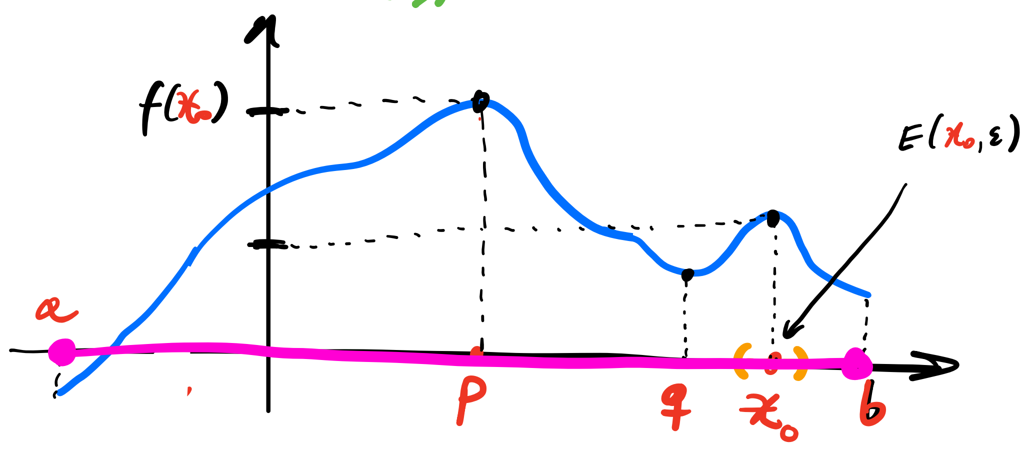
Recordamos: $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo (mínimo) absoluto en $p \in I$ si $f(x) \leq f(p)$ $(\geq)$ $\forall x \in I$



Def: $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo (mínimo) relativo en $x_0 \in I$ si:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;/\; f(x) \leq f(x_0) \;(\geq) \quad \forall x \in E(x_0, \varepsilon) \cap I$$

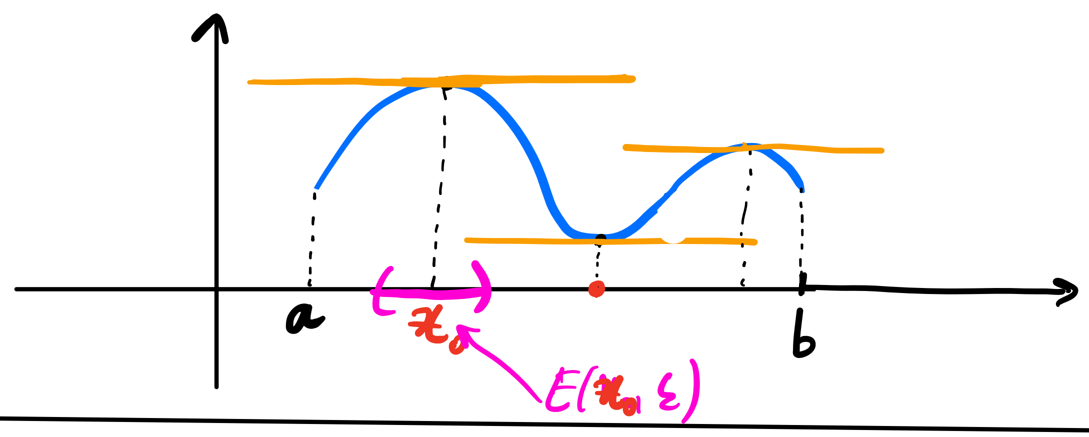
En el dibujo,
- hay mínimos relativos en a, b y q.
- hay máximos relativos en p y x_0.

Además, el máximo relativo en p, es absoluto.
el mínimo relativo en a, es absoluto.

Obs: Los máximos (mínimos) absolutos son máximos (mínimos) relativos.

Vamos a decir que $f: I \to \mathbb{R}$ tiene un extremos relativo en x_0 si f tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0.

<u>Proposición:</u> Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Entonces, si f es derivable en x_0 y presenta un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$



<u>Dem:</u> Supongamos que tenemos un extremo relativo en x_0. Entonces f presenta un máximo o un mínimo relativo en x_0. Supongamos que es un máximo relativo en x_0, el otro caso se prueba de manera análoga.

Entonces, $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in E(x_0, \varepsilon) \cap [a,b]$

Queremos ver que $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{?}{=} 0.$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \text{porque } \; f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ \text{y } \quad x - x_0 \geq 0 \end{array}\right)$$

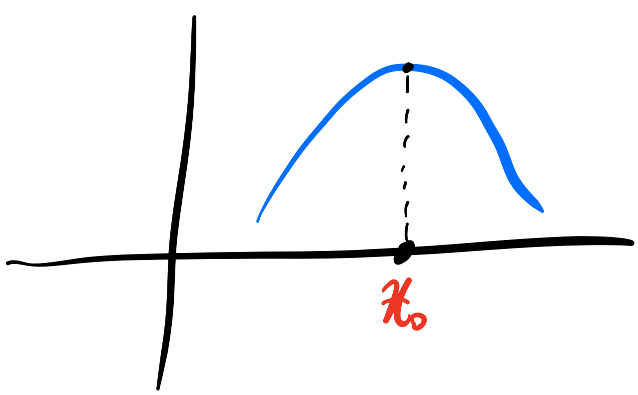
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \text{Porque } \; f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ \text{y } \quad x - x_0 \leq 0 \end{array}\right)$$

Como f es derivable en x_0, los límites laterales del cociente incremental deben existir y ser iguales. Entonces, el límite del cociente incremental debe ser un número ≥ 0 y ≤ 0 a la vez.

No queda otra que ese límite sea 0.

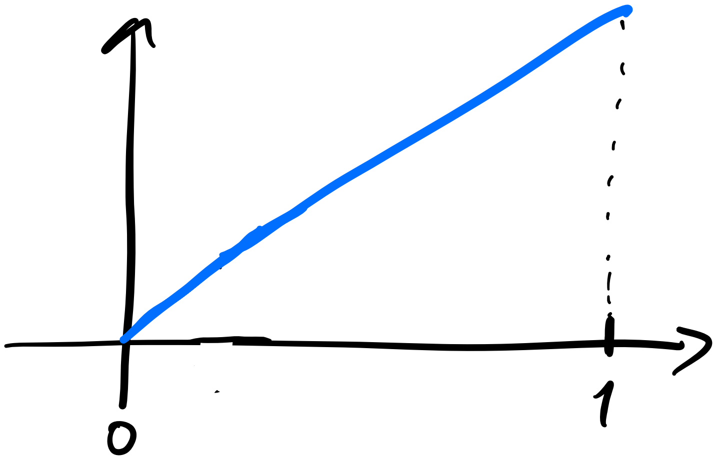
Es decir $f'(x_0) = 0$

$\blacksquare$



Observación 1:

Es necesario que el $x_0 \in (a,b)$



$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ /
$f(x) = x$

f presenta un mínimo relativo en 0,

pero la derivada en 0 no es 0

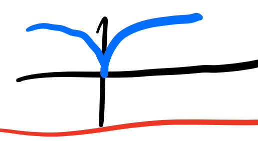
$\hookrightarrow$ derivada lateral en 0

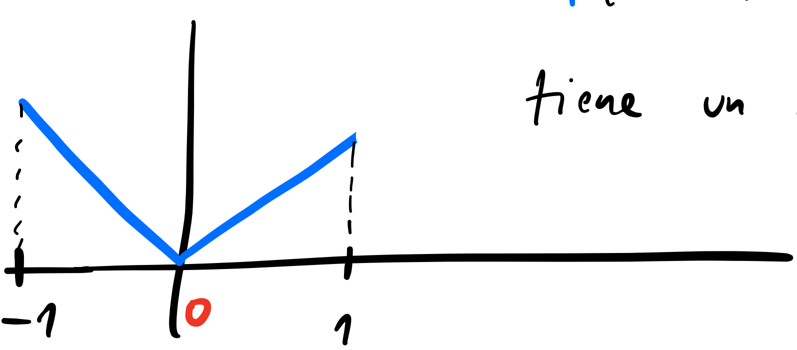
esto es $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}}$

Observación:

$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$;
$f(x) = |x|$

otro ejemplo
$f(x) = x^{2/3}$





tiene un mínimo relativo en 0

pero f no es derivable

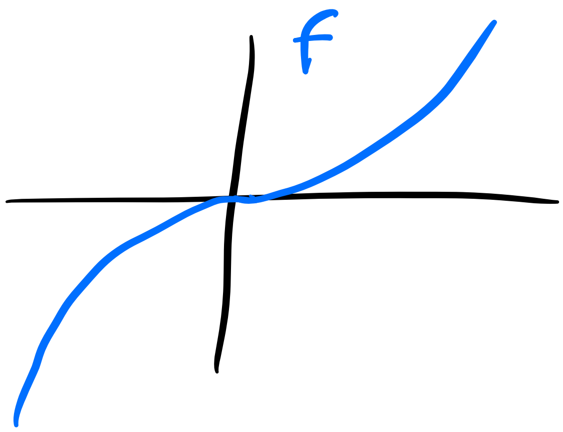
en 0.

Otra observación: El recíproco no vale

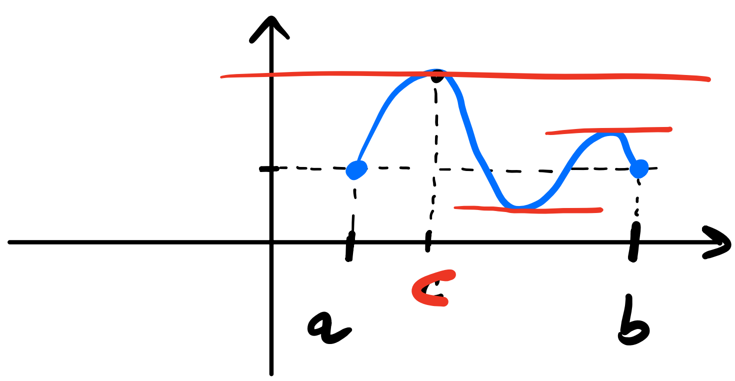
$$f'(x_0)=0 \not\Rightarrow f \text{ tiene un extremo relativo en } x_0$$

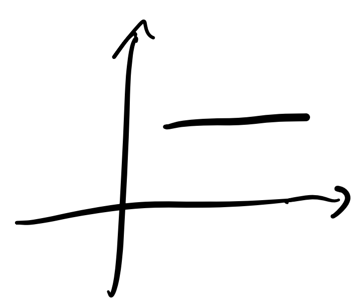
Para ver esto, considerar

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=x^3$; $f'(x)=3x^2$



Observar que $f'(0)=0$ pero f no presenta un extremo relativo en 0.





Teorema de Rolle: Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). Además $f(a)=f(b)$.

Entonces, $\exists c\in(a,b) \,/\, f'(c)=0$

Dem: Supongamos primero que f es constante, en ese caso $f'(c)=0$ para todo $c\in(a,b)$

Supongamos ahora que f no es constante.

Por otro lado, por el $\boxed{\text{teorema de Weierstrass}}$

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua entonces f tiene máximo y mínimo absoluto

f tiene máximo M y mínimo m.

Como f no es constante, concluímos que $M\neq m$.

Pero entonces $M\neq f(a)$ o $m\neq f(a)$.

Supongamos que $M\neq f(a)$, en el otro caso se concluye de la misma manera.

Que M sea el máximo absoluto de f quiere decir

que $\exists\ c \in [a,b] \,/\, f(c) = M$ y $f(x) \leq M$
$\forall x \in [a,b]$

Como $f(c) = M$ y $M \neq f(a)$
$M \neq f(b)$

$\Longrightarrow c \in (a,b)$

Luego, por la Proposición anterior,

Como $\left[\begin{array}{l} f \text{ es derivable en } c, \\ f \text{ presenta un extremo relativo en } c \\ c \in (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(c) = 0$

$\blacksquare$