

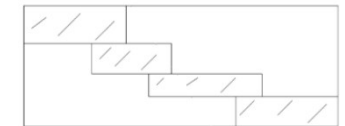
TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN EN PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Dr. Víctor M. Albornoz
Departamento de Industrias.
Campus Santiago Vitacura, Chile.
Universidad Técnica Federico Santa María

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, UdelaR.
Montevideo, miércoles 21 de Mayo de 2025

CONTENIDO

1. Introducción a los Métodos de Descomposición.
2. Formulación y resolución de modelos en AMPL.
- 3. Método de Benders.**
4. Generación de Columnas.
5. Método de Dantzig & Wolfe.
6. Conclusiones, Extensiones y palabras finales.



Ampliaremos la discusión del Método de Benders al caso en que el Subproblema propuesto no tenga solución para todos los valores de las variables originales del problema maestro en la descomposición propuesta.

Consideramos nuevamente el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max } cx + qy \\ &\text{s.a. } Ax \leq b \\ &\quad Tx + Wy \leq h \\ &\quad x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

El modelo anterior puede ser reformulado equivalentemente como:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & cx + \text{Max} \quad qy \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \qquad \text{s.a.} \quad Wy \leq h - Tx \\ & x \geq 0 \qquad y \geq 0 \end{array}$$

siempre que para cada $x \geq 0$, con $Ax \leq b$, el problema interior:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & qy \\ \text{s.a.} & Wy \leq h - Tx \\ & y \geq 0 \end{array}$$

posea solución óptima.

Si lo anterior ocurre, ya hicimos la deducción del método de Descomposición de Benders.

¿Qué ocurre sino?

El caso de interés ocurre cuando el problema proyectado es infactible.

Si fuese un problema no-acotado también lo sería el problema original.

Si el dual del problema proyectado es un problema no-acotado, por teoría de dualidad en PL el problema será infactible.

El dual del problema proyectado corresponde a:

$$\begin{aligned} \text{Min } & (h - T\mathbf{x})^T \mathbf{u} \\ \text{s.a. } & W^T \mathbf{u} \geq \mathbf{q} \\ & \mathbf{u} \geq 0, \end{aligned}$$

y si es un problema no-acotado, el conjunto de soluciones factibles $\{\mathbf{u} / W^T \mathbf{u} \geq \mathbf{q}, \mathbf{u} \geq 0\}$ es un conjunto no-acotado y su valor óptimo $-\infty$ (para un $\mathbf{x}$ dado).

Un conjunto no-acotado está caracterizado no solo por sus vértices $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^I$ sino que también por sus direcciones extremas $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2, \dots, \mathbf{d}^L$.

Para el caso del conjunto $\{\mathbf{u} / \mathbf{W}^T \mathbf{u} \geq q, \mathbf{u} \geq 0\}$, sus direcciones extremas son todos aquellos vectores $\mathbf{d}$ tales que $\mathbf{W}^T \mathbf{d} \geq 0$ y $\mathbf{d} \geq 0$.

La existencia de direcciones extremas permite que cada elemento de un poliedro se escriba en términos de sus vértices y direcciones extremas.

Así, para todo elemento de $\{u / W^T u \geq q, u \geq 0\}$

$$u = \alpha_1 \mathbf{u}^1 + \alpha_2 \mathbf{u}^2 + \dots + \alpha_t \mathbf{u}^t + \mu_1 \mathbf{d}^1 + \mu_2 \mathbf{d}^2 + \dots + \mu_\ell \mathbf{d}^\ell$$

con escalares $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_t \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \dots, \mu_\ell \geq 0$
tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_t = 1$.

Volvamos al problema proyectado y su dual:

$$\begin{array}{ll} \text{(SPP)} \quad \text{Max} \quad qy & \text{(SPD)} \quad \text{Min} \quad (h - Tx)u \\ \text{s.a.} \quad Wy \leq h - Tx & \text{s.a.} \quad W^T u \geq q \\ y \geq 0 & u \geq 0 \end{array}$$

Así entonces, el problema (SPP) tendrá solución siempre que se cumpla: $0 \leq (h - Tx)d^\ell$ para cada dirección extrema d^ℓ del poliedro dual, con $\ell=1,2,\dots,L$ (Lema de Farkas-Minkowski) .

Definiendo el conjunto:

$$K = \{ x / 0 \leq (h - T_x)d^\ell, \ell=1,2,\dots,L \}$$

se cumpliría entonces que el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max } cx + qy \\ &\text{s.a. } Ax \leq b \\ &\quad Tx + Wy \leq h \\ &\quad x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

es equivalente a:

$$\begin{aligned} &\text{Max } cx + \text{Max } qy \\ &\text{s.a. } Ax \leq b \quad \text{s.a. } Wy \leq h - Tx \\ &\quad x \in K \quad y \geq 0 \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

y también equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } cx & + \quad \text{Min } (h - Tx)u \\ \text{s.a. } Ax \leq b & \text{s.a. } W^T u \geq q \\ \textcolor{red}{x} \in K & u \geq 0 \\ x \geq 0 & \end{array}$$

que con la notación ya introducida, equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } cx & + \quad \min_{i=1, \dots, I} \{ (h - Tx)u^i \} \\ \text{s.a. } Ax \leq b & \\ \textcolor{red}{x} \in K & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

Empleando como antes una reformulación en términos de un modelo lineal, agregando la variable z , el problema anterior da origen al siguiente *Problema Maestro*:

$$\begin{aligned} \text{(PM)} \quad & \text{Max} \quad cx + z \\ & \text{s.a.} \quad Ax = b \\ & \quad z \leq (h - Tx)u^i \quad i=1, \dots, I \\ & \quad 0 \leq (h - Tx)d^\ell \quad \ell=1, \dots, L \\ & \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

La estrategia de resolución consiste entonces en resolver un *Problema Maestro Reducido* (PMR) que contiene solo aquellas restricciones de optimalidad y factibilidad que el propio método genera iteración tras iteración, digamos:

$$\text{(PMR)} \quad \text{Max} \quad cx + z$$

$$\text{s.a.} \quad Ax = b$$

$$z \leq (h - Tx)u^i \quad i=1, \dots, t \quad (t \ll I)$$

$$0 \leq (h - Tx)d^\ell \quad \ell=1, \dots, r \quad (r \ll L)$$

$$x \geq 0.$$

Denotando por $(\bar{x}, \bar{z})$ la solución óptima de (PMR), esta también será la solución óptima del problema maestro si y solo si cumple con todas las restricciones de optimalidad del mismo, esto es siempre que:

$$\bar{z} \leq (h - T\bar{x})u^i \quad i = 1, \dots, I$$

Lo anterior es posible de verificar resolviendo el siguiente Subproblema (dual):

$$\begin{aligned} \text{(SP)} \quad & \text{Min} \quad (h - T\bar{x})u \\ & \text{s.a} \quad W^T u \geq d \\ & \quad u \geq 0. \end{aligned}$$

Si el problema tiene solución, denotando por $\mathbf{u}^{t+1}$ el vértice y solución óptima de (SP), la condición de optimalidad del (PM) se verifica si y solo si:

$$\bar{z} \leq (h - T\bar{x}) \mathbf{u}^{t+1}$$

Si lo anterior no se cumple, hemos encontrado un nuevo vértice del poliedro $\{u / W^T u \geq d, u \geq 0\}$ que no verifica la condición de optimalidad.

Dado lo anterior, se agrega al problema maestro reducido (PMR) la nueva restricción:

$$z \leq (h - T\mathbf{x})\mathbf{u}^{t+1}$$

pasando a la siguiente iteración del método.

Por otra parte, si el *Subproblema* (dual):

$$\begin{aligned} \text{(SP)} \quad & \text{Min } (h - T\bar{x})u \\ & \text{s.a } W^T u \geq d \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

no tiene solución, se genera una dirección extrema $\mathbf{d}^{r+1}$, agregando al problema maestro reducido la siguiente restricción:

$$0 \leq (h - T\mathbf{x})\mathbf{d}^{r+1}$$

pasando a la siguiente iteración del método.

¿Qué ocurre en la implementación del Método de Benders si no disponemos de la variable de demanda insatisfecha en el problema de localización y transporte?

Modelo:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in O} f_i B_i + \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} v_{ij} S_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j \in D} S_{ij} \leq o_i B_i \quad i \in O$$

$$\sum_{i \in O} S_{ij} = d_j \quad j \in D$$

$$S_{ij} \geq 0, B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O, j \in D$$

El modelo anterior puede ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{i \in O} f_i B_i \quad + \quad \text{Min} \quad \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} v_{ij} S_{ij} \\
 & \text{s.a.} \quad B_i \in \{0,1\} \quad i \in O \quad \text{s.a.} \quad \sum_{j \in D} S_{ij} \leq o_i B_i \quad i \in O \\
 & \quad \quad \quad \textcolor{red}{B \in K} \quad \quad \quad \sum_{i \in O} S_{ij} = d_j \quad j \in D \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad S_{ij} \geq 0, \quad i \in O, j \in D
 \end{aligned}$$

Por dualidad el problema también equivale a:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{i \in O} f_i B_i \quad + \quad \text{Max} \quad \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i + \sum_{j \in D} d_j \pi_j \\
 & \text{s.a.} \quad B_i \in \{0,1\} \quad i \in O \quad \text{s.a.} \quad \lambda_i + \pi_j \leq v_{ij} \quad i \in O \quad j \in D \\
 & \quad \quad \quad \textcolor{red}{B \in K} \quad \quad \quad \lambda_i \leq 0, \pi_j \in \Re \quad i \in O, j \in D
 \end{aligned}$$

Sean $(\lambda, \pi)^{(1)}, \dots, (\lambda, \pi)^{(I)}$ los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles del subproblema dual, así el problema original equivale a:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i \in O} f_i B_i + \max_{p=1, \dots, I} \{ \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \} \\ \text{s.a.} \quad & B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O \end{aligned}$$

$$B \in K$$

Lo anterior define el siguiente problema equivalente

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i \in O} f_i B_i + z \\ \text{s.a.} \quad & z \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \quad p=1, \dots, I \end{aligned}$$

$$B \in K$$

$$B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O$$

Si $(\lambda, \pi)^{(I+1)}, \dots, (\lambda, \pi)^{(I+L)}$ son las direcciones extremas del conjunto de soluciones factibles del Subproblema dual, ello define entonces el siguiente

PROBLEMA MAESTRO

$$\begin{aligned}
 &\text{Min} \quad \sum_{i \in O} f_i B_i + z \\
 &\text{s.a.} \quad z \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \quad p=1, \dots, I \\
 &\quad \quad 0 \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(\ell)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(\ell)} \quad \ell=I+1, \dots, I+L \\
 &\quad \quad B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O
 \end{aligned}$$

Si $(\mathbf{B}^k, \mathbf{z}^k)$ es la solución óptima del Problema Maestro Reducido, esta también lo será para el Problema Maestro en la medida que cumpla con:

$$\mathbf{z}^k \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \quad p=1, \dots, I$$

Para ello se resuelve el siguiente Subproblema:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i + \sum_{j \in D} d_j \pi_j \\ & \text{s.a. } \lambda_i + \pi_j \leq v_{ij} \quad i \in O, j \in D \\ & \lambda_i \leq 0, \pi_j \in \mathbb{R} \quad i \in O, j \in D \end{aligned}$$

Si el Subproblema tiene solución óptima esta se alcanza en un punto extremo (λ^k, π^k) y el método concluye al comprobar:

$$z^k \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i^{(k)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(k)}$$

En caso de no cumplirse, se agrega al Maestro Reducido la (nueva) restricción:

$$z \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(k)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(k)}$$

Si el Subproblema resulta no-acotado, es posible obtener una dirección extrema (λ^k, π^k) y se agrega al Maestro Reducido la (nueva) restricción:

$$0 \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(k)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(k)}$$

Los detalle de la implementación del método considera los archivos trnloc1d.mod, trnloc1d.run y trnloc1.dat. y en los archivos trnloc1p.mod, y trnloc1p.run mediante el empleo del Subproblema primal.

The screenshot displays the AMPL IDE interface. On the left, the 'Current Directory' pane shows the file structure of the project, including files like ej1ampl.mod, ej2ampl.dat, ej2ampl.mod, ej2ampl.run, STEEL.DAT, STEEL.MOD, STEEL.DAT, STEELT.MOD, TRANSP.DAT, TRANSP.MOD, TRANSP.RUN, trnloc1.dat, trnloc1.mod, and trnloc1.run. The central 'Console' pane shows the output of the AMPL solver, including the command 'ampl: include trnloc1.run;', the solver version 'CPLEX 12.6.1.0: sensitivity', and the results of the optimization, such as '108 MIP simplex iterations', '0 branch-and-bound nodes', and 'absmipgap = 304.508, relmipgap = 5.30944e-05'. The right pane shows the contents of the 'trnloc1.mod' file, which includes the model definition, solver selection, and display commands. The bottom status bar indicates the system time as 12:12 on 15-03-2016.

```
AMPL
ampl: include trnloc1.run;
CPLEX 12.6.1.0: sensitivity
display=2
CPLEX 12.6.1.0: optimal integer solution within mipgap or absmipgap
108 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
absmipgap = 304.508, relmipgap = 5.30944e-05
No basis.
Build [*] :=
1 0 4 0 7 0 10 0 13 0 16 0 19 0 22 1 25 1
2 0 5 0 8 0 11 0 14 0 17 1 20 1 23 0
3 0 6 0 9 0 12 0 15 0 18 1 21 0 24 1
;
Ship [*,*]
: A3 A6 A8 A9 B2 B4 :=
1 0 0 0 0 0 0
2 0 0 0 0 0 0
3 0 0 0 0 0 0
4 0 0 0 0 0 0
5 0 0 0 0 0 0
6 0 0 0 0 0 0
7 0 0 0 0 0 0
8 0 0 0 0 0 0
9 0 0 0 0 0 0
10 0 0 0 0 0 0
11 0 0 0 0 0 0
12 0 0 0 0 0 0
13 0 0 0 0 0 0
14 0 0 0 0 0 0
15 0 0 0 0 0 0
16 0 0 0 0 0 0
17 0 8810 0 0 960
18 0 5190 13500 0 0
19 0 0 0 0 0
20 0 12000 0 9220 0
21 0 0 0 0 0
```

```
# CARGA DEL MODELO Y DATOS
reset;
model trnloc1.mod;
data trnloc1.dat;

# SELECCION DEL SOLVER
option solver cplex;

solve;

display Build;

display Ship;

display Costo_Total;

# GUARDAR RESULTADOS EN UN ARCHIVO

display Build > trnloc1.sal;
display Ship > trnloc1.sal;
display Costo_Total > trnloc1.sal;
```