

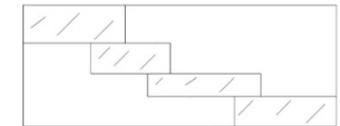
TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN EN PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Dr. Víctor M. Albornoz
Departamento de Industrias.
Campus Santiago Vitacura, Chile.
Universidad Técnica Federico Santa María

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, UdelaR.
Montevideo, martes 20 de Mayo de 2025

CONTENIDO

1. Introducción a los Métodos de Descomposición.
2. Formulación y resolución de modelos en AMPL.
- 3. Método de Benders.**
4. Generación de Columnas.
5. Método de Dantzig & Wolfe.
6. Conclusiones, Extensiones y palabras finales.



Ejemplo 3. En Albornoz et al. (2004), se abordó la expansión de capacidad de un sistema térmico de generación eléctrica usando el Método de Benders.



Intl. Trans. in Op. Res. 11 (2004) 243-257

INTERNATIONAL
TRANSACTIONS
IN OPERATIONAL
RESEARCH

A two-stage stochastic integer programming model for a thermal power system expansion

Víctor M. Albornoz^a, Pablo Benario^b and Manuel E. Rojas^a

^aDepartamento de Industrias, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. Santa María, 6400, Santiago, Chile,

^bMega Red Ingenieros Ltda, Coventry 690, D/24, Santiago, Chile.

E-mail: victor.albornoz@ind.utfsm.cl [Albornoz]; pbenario@mega-red.cl [Benario]

Received 21 January 2003; received in revised form 1 December 2003; accepted 21 December 2003

Abstract

In this paper the obtaining of an optimum policy in the capacity expansion planning of a particular thermal-electric power system is proposed. Therefore, a two-stage stochastic integer programming is formulated. The model includes, through a finite group of scenarios, the existent uncertainty related to the future availability of the thermal plants currently under operation. The resultant model is solved numerically by the application of the L-shaped method, whose implementation and development were executed using the software AMPL, with CPLEX as a solver. The results reached are shown, which validate the use of the methodology adopted in this work.

Keywords: stochastic integer programming; capacity expansion; decomposition

En Chile actualmente hay tres sistemas eléctricos:

- Sistema Eléctrico Nacional (SIC+SING)
- Sistema de Aysén
- Sistema de Magallanes

El problema consideró el Sistema de Magallanes, que opera una sola empresa con 4 subsistemas: EDELMAG S.A. Hoy tiene alrededor de 60 mil clientes con una potencia instalada de 105,7 MW

Para la expansión de la capacidad del Subsistema de Punta Arenas se proponía estudiar un plan de inversión sobre un horizonte de planificación de 10 años, utilizando para ello los mismos 3 tipos de tecnología existente en ese momento, esto es, unidades de generación con turbina a gas, motores a gas y motores diesel.



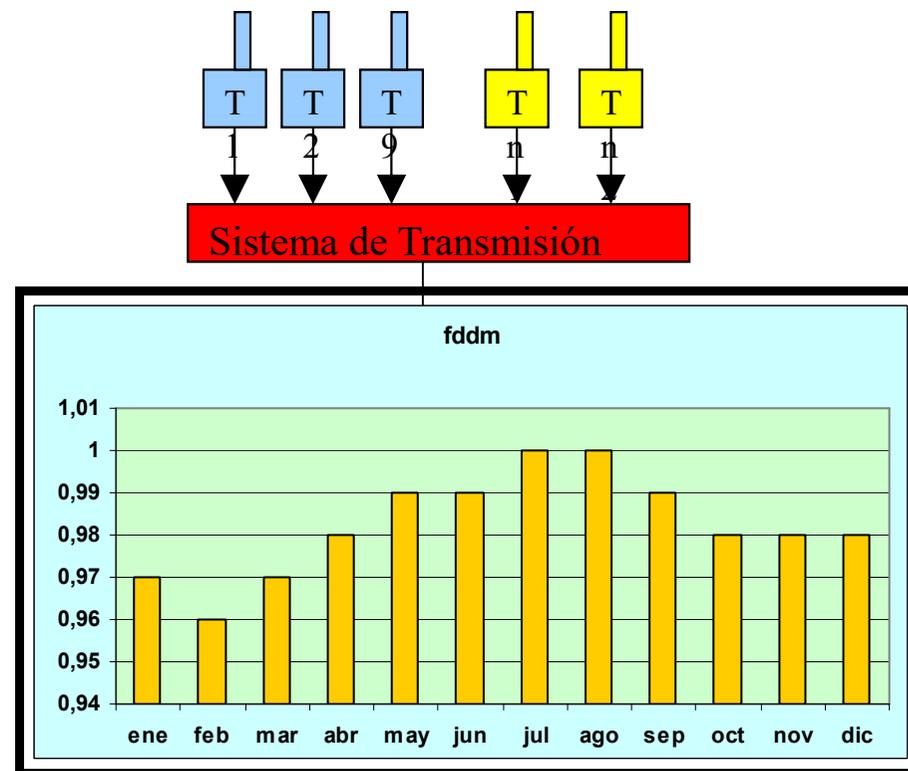
Unidades Existentes:

Equipo	Capacidad (MW)	Mantenimiento anual (días)	costo variable no-combustible (USD/KWh)	consumo específico
TGH	23,75	30	2,29	0,369
TGS	10,00	30	12	0,369
MGAS	2,72	30	11,6	0,440
SULZ1	1,4	30	9,81	0,269
SULZ2	1,4	30	9,81	0,269
SULZ3	1,4	30	9,81	0,269
CAT1	1,46	30	11,60	0,244
CAT2	1,46	30	11,60	0,244
CAT3	1,46	30	11,60	0,244

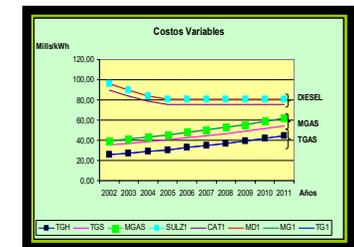
Unidades consideradas para expansión:

Equipo	Tipo	Capacidad (MW)	Inversión (USD/kW)
MD1	motor diesel	1	550
MD2	motor diesel	2	500
MG1	motor a gas	3	650
MG2	motor a gas	4	600
TG1	turbina a gas	6	700
TG2	turbina a gas	11	600

Se supone conocida una estimación de la demanda anual para cada uno de los 10 años del horizonte de planificación. La demanda anual determina, por medio de ciertos factores, la curva de duración de carga mensual.



El modelo busca una solución de modo que el sistema genere a mínimo costo la potencia necesaria para satisfacer la demanda en cada periodo e intervalo de la curva de duración de carga, tanto con las unidades existentes como con las propuestas por el modelo.



De no ser posible, se ha incorporado un costo de falla proporcional a la profundidad de la falla producida.

Variables de decisión.

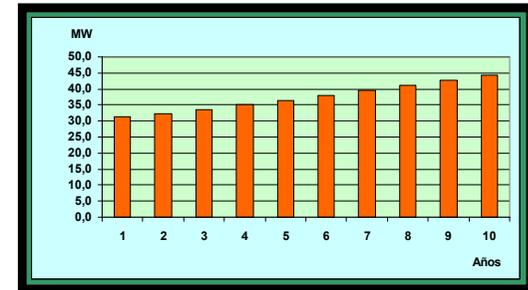
Variables binarias, si se invierte o no en cada tipo de unidad considerada para la expansión, en cada periodo (η).

Total de potencia instalada con cada tipo de unidad (nueva) en cada periodo (\mathbf{x}).

Potencia generada con cada tipo de unidad en cada intervalo de la curva de demanda en cada periodo, incluida la potencia de falla (\mathbf{y}).

Función objetivo.

Minimización de costos totales de inversión y generación en el horizonte de planificación dado.



Restricciones.

Secuencia de la expansión.

Capacidades de generación.

Requerimientos de demandas.



De manera resumida, el modelo puede ser representado equivalentemente de acuerdo al siguiente problema entero-mixto:

$$\text{Min } f\eta + oy$$

s.a.

$$Ax = U\eta$$

$$Wy \leq h + Bx$$

$$Zy = d$$

$$x \geq 0, \eta \in \{0,1\}, y \geq 0.$$

El modelo anterior puede igualmente ser representado como:

$$\text{Min } f\eta + \text{Min } \{oy / Wy \leq h + Bx, Zy=d, y \geq 0 \}$$

s.a.

$$Ax = U\eta$$

$$x \geq 0, \eta \in \{0,1\}.$$

Por dualidad también tenemos que equivale a:

$$\text{Min } f\eta + \text{Max } \{ (h + Bx)u + dv / W^t u + Z^T v \leq o, u \leq 0 \}$$

s.a.

$$Ax = U\eta$$

$$x \geq 0, \eta \in \{0,1\}.$$

Denotando por (u^l, v^l) para $l=1, \dots, t$, los vértices del poliedro $\{ (u, v) / W^T u + Z^T v \leq o, u \leq 0 \}$, el problema equivale a su vez a:

$$\text{Min } f\eta + \max_{l=1, \dots, t} \{ (h + Bx)u^l + dv^l \}$$

s.a.

$$Ax = U\eta$$

$$x \geq 0, \eta \in \{0, 1\}.$$

O bien equivalentemente a resolver el siguiente
Problema Maestro (PM):

$$\text{Min } f\eta + z$$

s.a.

$$z \geq (h+Bx)u^l + dv^l \quad l=1,\dots,t$$

$$Ax = U\eta$$

$$x \geq 0, \eta \in \{0,1\}.$$

La estrategia de resolución consiste entonces en resolver un *Problema Maestro Reducido* (PMR) que contiene solo aquellas restricciones que el propio método genera iteración tras iteración.

Denotando por $(\bar{x}, \bar{\eta}, \bar{z})$ la solución óptima del maestro reducido, esta es la solución óptima del (PM) ssi:

$$\bar{z} \geq (h + B\bar{x})u^l + dv^l \quad l = 1, \dots, t$$

Lo anterior es posible de verificar resolviendo el siguiente Subproblema:

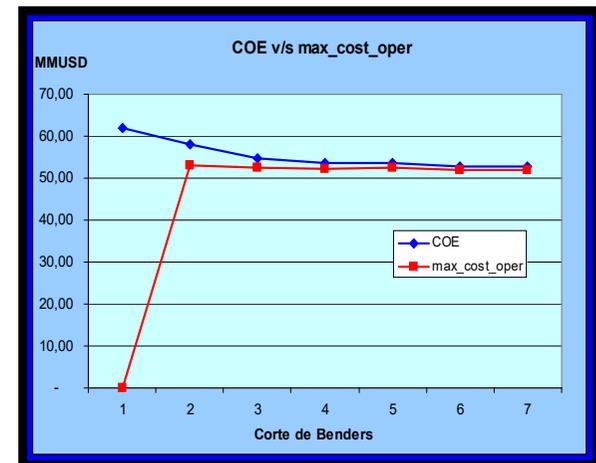
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & (h + B\bar{x})u + dv \\ \text{s.a} \quad & W^T u + Z^T v \leq 0, \\ & u \leq 0. \end{aligned}$$

En efecto, denotando por (u^k, v^k) el vértice donde se alcanza el óptimo del Subproblema, la condición anterior se verifica ssi:

$$\bar{z} \geq (h + B\bar{x})u^k + dv^k$$

Si esto no se cumple se agrega al maestro reducido la nueva restricción: $z \geq (h + Bx)u^k + dv^k$

Se resolvieron distintas instancias del problema, que en el caso del modelo determinista requería resolver un modelo con alrededor de 7.200 variables y unas 7.800 restricciones lineales.



El modelo fue extendido a uno de Optimización Estocástica Entera para 100 escenarios que poseía unas 577.000 variables y 642.000 restricciones y fue resuelto empleando el Método de Benders conjuntamente con AMPL y Cplex.

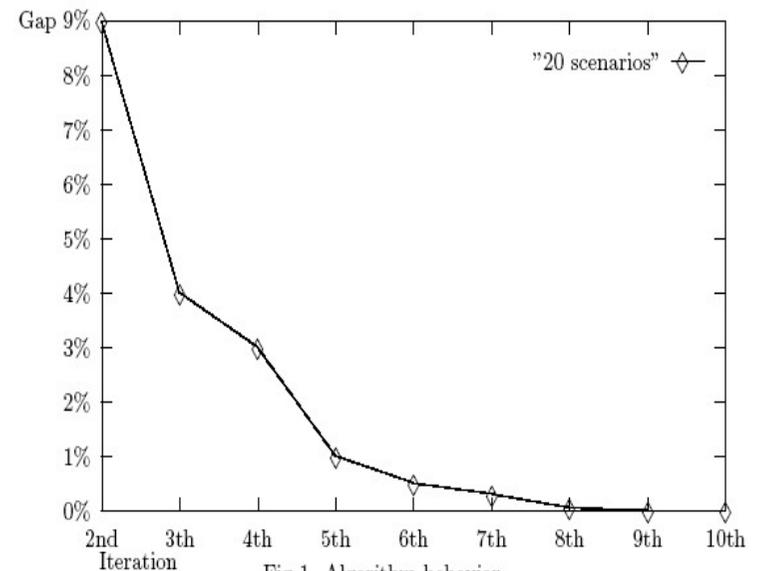


Fig 1. Algorithm behavior.

Ejemplo 3. Resolveremos un problema de localización y transporte mediante el Método de Benders.

Lo que sigue incluye la deducción del esquema de resolución algorítmica e irá acompañada de la implementación computacional del método en AMPL.



Consideramos la siguiente notación:

Conjuntos e índices.

O : conjunto de potenciales orígenes, con $i \in O$.

D : conjunto de destinos, con $j \in D$.

Parámetros.

o_i : oferta total de unidades en el potencial origen i .

d_j : demanda en destino j .

f_i : costo fijo de apertura del potencial origen i .

$v_{i,j}$: costo unitario de transporte desde i a j .

cu_j : costo unitario de demanda no satisfecha en j .

VARIABLES DE DECISIÓN.

B_i : variable binaria que toma el valor 1 si el potencial origen i es abierto y 0 en caso contrario.

S_{ij} : unidades transportadas desde i a j .

U_j : unidades de demanda no satisfecha del destino j .

Modelo:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i \in O} f_i B_i + \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j \in D} cu_j U_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j \in D} S_{ij} \leq o_i B_i && i \in O \\ & \sum_{i \in O} S_{ij} + U_j = d_j && j \in D \\ & S_{ij} \geq 0, U_j \geq 0, B_i \in \{0, 1\} && i \in O, j \in D \end{aligned}$$

Variables de decisión.

B_i : variable binaria que toma el valor 1 si el potencial origen i es abierto y 0 en caso contrario.

S_{ij} : unidades transportadas desde i a j .

U_j : unidades de demanda no satisfecha del destino j .

Modelo:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i \in O} f_i B_i + \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j \in D} cu_j U_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j \in D} S_{ij} \leq o_i B_i && i \in O \\ & \sum_{i \in O} S_{ij} + U_j = d_j && j \in D \\ & S_{ij} \geq 0, U_j \geq 0, B_i \in \{0, 1\} && i \in O, j \in D \end{aligned}$$

El modelo propuesto se carga y resuelve para una determinada instancia en AMPL, considerando los archivos trnloc01.mod y trnloc01.dat para su resolución directa.

The screenshot shows the AMPL IDE interface. On the left is a file explorer showing the current directory: C:\Users\Victor Alborno\Documents\cu. The files listed include ej1ampl.mod, ej2ampl.dat, ej2ampl.mod, ej2ampl.run, STEEL.DAT, STEEL.MOD, STEEL.DAT, STEEL.MOD, TRANSP.DAT, TRANSP.MOD, TRANSP.RUN, trnloc1.dat, trnloc1.mod, and trnloc1.run.

The central console window displays the following output:

```
AMPL
ampl: include trnloc1.run;
CPLEX 12.6.1.0: sensitivity
display=2
CPLEX 12.6.1.0: optimal integer solution within mippag or absmippag
108 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
absmippag = 304.508, relmippag = 5.30944e-05
No basis.
Build [*] :=
1 0 4 0 7 0 10 0 13 0 16 0 19 0 22 1 25 1
2 0 5 0 8 0 11 0 14 0 17 1 20 1 23 0
3 0 6 0 9 0 12 0 15 0 18 1 21 0 24 1
;

Ship [*,*]
:
A3      A6      A8      A9      B2      B4      :=
1      0      0      0      0      0      0
2      0      0      0      0      0      0
3      0      0      0      0      0      0
4      0      0      0      0      0      0
5      0      0      0      0      0      0
6      0      0      0      0      0      0
7      0      0      0      0      0      0
8      0      0      0      0      0      0
9      0      0      0      0      0      0
10     0      0      0      0      0      0
11     0      0      0      0      0      0
12     0      0      0      0      0      0
13     0      0      0      0      0      0
14     0      0      0      0      0      0
15     0      0      0      0      0      0
16     0      0      0      0      0      0
17     0      0      8810 0      0      960
18     0      0      5190 13500 0      0
19     0      0      0      0      0      0
20     0      12000 0      0      9220 0
21     0      0      0      0      0      0
```

The right-hand code editor shows the AMPL model and data files:

```
# CARGA DEL MODELO Y DATOS
reset;
model trnloc1.mod;
data trnloc1.dat;

# SELECCION DEL SOLVER
option solver cplex;

solve;

display Build;

display Ship;

display Costo_Total;

# GUARDAR RESULTADOS EN UN ARCHIVO
display Build > trnloc1.sal;
display Ship > trnloc1.sal;
display Costo_Total > trnloc1.sal;
```

The Windows taskbar at the bottom shows the system tray with the date 15-03-2016 and time 12:12.

Por proyección, el modelo puede ser formulado equivalentemente como:

$$\begin{aligned} \text{Min } \sum_{i \in O} f_i B_i & \quad + \quad \text{Min } \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j \in D} cu_j U_j \\ \text{s.a. } B_i \in \{0,1\} \quad i \in O & \quad \text{s.a. } \sum_{j \in D} S_{ij} \leq o_i B_i \quad i \in O \\ & \quad \sum_{i \in O} S_{ij} + U_j = d_j \quad j \in D \\ & \quad S_{ij} \geq 0, U_j \geq 0, \quad i \in O, j \in D. \end{aligned}$$

Notar que cualquiera sea el valor de las variables B_i , el problema proyectado (de transporte) siempre tendrá solución.

Por teoría de dualidad en programación lineal, el problema anterior también equivale a:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{i \in O} f_i B_i \quad + \quad \text{Max } \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i + \sum_{j \in D} d_j \pi_j \\
 & \text{s.a. } B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O \quad \text{s.a. } \lambda_i + \pi_j \leq v_{ij} \quad i \in O \quad j \in D \\
 & \quad \pi_j \leq cu_j \quad j \in D \\
 & \quad \lambda_i \leq 0, \pi_j \in \mathfrak{R} \quad i \in O, j \in D
 \end{aligned}$$

Dado que el problema proyectado tiene solución óptima, el (subproblema) dual también y se alcanza en uno de sus vértices.

Denotando por $(\lambda, \pi)^{(1)}, \dots, (\lambda, \pi)^{(I)}$ los vértices o puntos extremos del conjunto de soluciones factibles del subproblema dual, el problema original equivale entonces a:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i \in O} f_i B_i + \max_{p=1, \dots, I} \left\{ \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \right\} \\ & \text{s.a. } B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O \end{aligned}$$

Lo anterior define el PROBLEMA MAESTRO:

$$\text{Min } \sum_{i \in O} f_i B_i + z$$

$$\text{s.a. } z \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \quad p=1, \dots, I$$

$$B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O$$

Así como el k-ésimo MAESTRO REDUCIDO:

$$\text{Min } \sum_{i \in O} f_i B_i + z$$

$$\text{s.a. } z \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \quad p=1, \dots, k-1$$

$$B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O$$

Si en la k -ésima iteración del método (B^k, z^k) denota la solución óptima del Problema Maestro Reducido, esta también lo será para el Problema Maestro en la medida que cumpla con:

$$z^k \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \quad p=1, \dots, I$$

Para constatar lo anterior, basta que se verifique en aquel vértice donde está el mayor de esos valores en el término de la derecha, para lo cual se resuelve el siguiente Subproblema (dual):

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i + \sum_{j \in D} d_j \pi_j \\ \text{s.a.} \quad & \lambda_i + \pi_j \leq v_{ij} \quad i \in O, j \in D \\ & \pi_j \leq cu_j \quad j \in D \\ & \lambda_i \leq 0, \pi_j \in \mathfrak{R} \quad i \in O, j \in D \end{aligned}$$

Para constatar lo anterior, basta que se verifique en aquel vértice donde está el mayor de esos valores en el término de la derecha, para lo cual se resuelve el siguiente Subproblema (dual):

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i + \sum_{j \in D} d_j \pi_j \\
 \text{s.a.} \quad & \lambda_i + \pi_j \leq v_{ij} \quad i \in O, j \in D \quad (S_{ij}) \\
 & \pi_j \leq cu_j \quad j \in D \quad (U_j) \\
 & \lambda_i \leq 0, \pi_j \in \mathfrak{R} \quad i \in O, j \in D
 \end{aligned}$$

Notar que de manera alternativa, se podría resolver el Subproblema (primal):

$$\text{Min } \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j \in D} cu_j U_j$$

$$\text{s.a. } \sum_{j \in D} S_{ij} \leq o_i B_i \quad i \in O$$

$$\sum_{i \in O} S_{ij} + U_j = d_j \quad j \in D$$

$$S_{ij} \geq 0, U_j \geq 0, i \in O, j \in D$$

Notar que de manera alternativa, se podría resolver el Subproblema (primal):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j \in D} cu_j U_j \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j \in D} S_{ij} \leq o_i B_i \quad i \in O \quad (\lambda_i) \\ & \sum_{i \in O} S_{ij} + U_j = d_j \quad j \in D \quad (\pi_j) \\ & S_{ij} \geq 0, U_j \geq 0, i \in O, j \in D \end{aligned}$$

y obtener las variables duales óptimas como los precios sombra de las respectivas restricciones de oferta y demanda.

De este modo, si el Subproblema (dual) alcanza su solución óptima en el punto extremo $(\lambda^{(k)}, \pi^{(k)})$, el método concluye al comprobar:

$$z^k \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i^{(k)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(k)}$$

En caso que lo anterior no se cumpla, se agrega al Problema Maestro Reducido la (nueva) restricción:

$$z \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(k)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(k)}$$

Lo deducido de acuerdo al Método de Benders se implementa y resuelve en AMPL para la instancia dada, considerando ahora los archivos trnloc01d.mod y trnloc01d.run para el Subproblema dual y con trnloc01p.mod y trnloc01p.run para el Subproblema primal.

