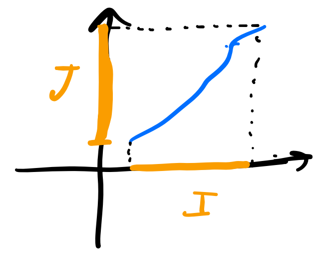
Sea $f: I \to \mathbb{R}$ $\left|\begin{matrix}\text{estrictamente} \\ \text{creciente}\end{matrix}\right|$ y continua



Entonces $Im(f)$ es un intervalo,
llamémoslo J.

Entonces $f: I \to J$ es una función biyectiva y creciente entre dos intervalos

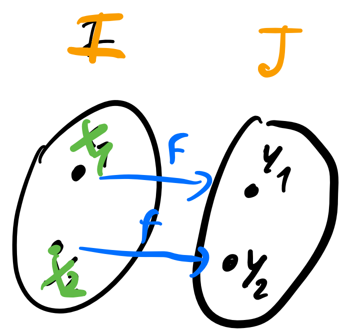
Afirmación: $f^{-1}: J \to I$ es estrictamente creciente.

Para ver esto, tomemos $y_1 < y_2 \in J$,
queremos ver que $f^{-1}(y_1) \overset{?}{<} f^{-1}(y_2)$

Supongamos por absurdo que $\boxed{f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)}$

En ese caso, $\exists\, x_1, x_2$ tales que

$f(x_1) = y_1 \Rightarrow f^{-1}(y_1) = x_1$
$f(x_2) = y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_2) = x_2$



Tenemos entonces que:

$$\underbrace{f^{-1}(y_1)}_{} > \underbrace{f^{-1}(y_2)}_{}$$
$$\boxed{x_1 > x_2}$$

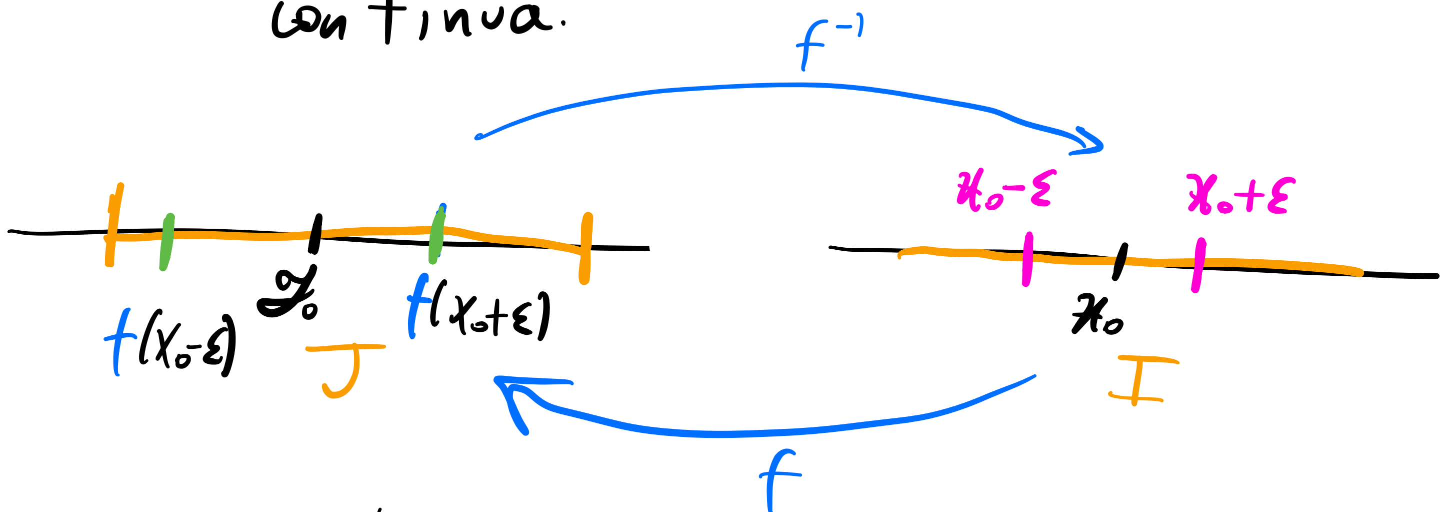
pero

$$\underbrace{y_1}_{} < \underbrace{y_2}_{}$$
$$\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$

contradice que f es creciente

Entonces, nuestra hipótesis es absurda, lo que prueba que f^{-1} es creciente.

Afirmación: $f^{-1}: J \to I$ es continua.

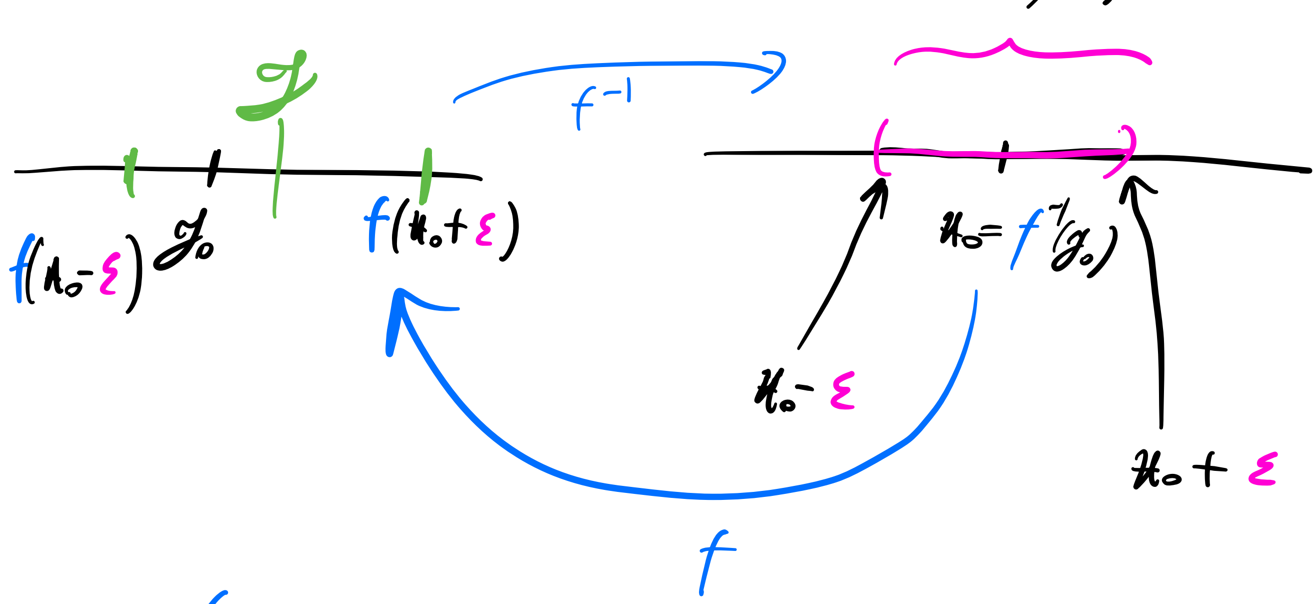


$$x_0 = f^{-1}(y_0) \iff y_0 = f(x_0)$$

Queremos ver que f^{-1} es cont en y_0.

Es decir, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario queremos encontrar un $\delta_\varepsilon > 0$ / si $y \in E(y_0, \delta_\varepsilon)$ entonces $f^{-1}(y) \in E(x_0, \varepsilon)$

$f^{-1}(y_0)$ $\qquad$ $E(x_0, \varepsilon)$



Como f es creciente, $f(x_0-\varepsilon) < \underbrace{f(x_0)}_{y_0} < f(x_0+\varepsilon)$

Como f^{-1} es creciente, si

$$\boxed{f(x_0-\varepsilon) < y < f(x_0+\varepsilon) \implies \underbrace{f^{-1}(f(x_0-\varepsilon))}_{x_0-\varepsilon} < f^{-1}(y) < \underbrace{f^{-1}(f(x_0+\varepsilon))}_{x_0+\varepsilon}} \quad (*)$$

Tomemos $\delta_\varepsilon > 0$ de forma tal que

$$E(y_0, \delta_\varepsilon) \subseteq \left(f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)\right)$$

Entonces, si $y \in E(y_0, \delta_\varepsilon) \Rightarrow y \in \left(f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)\right)$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

(*)

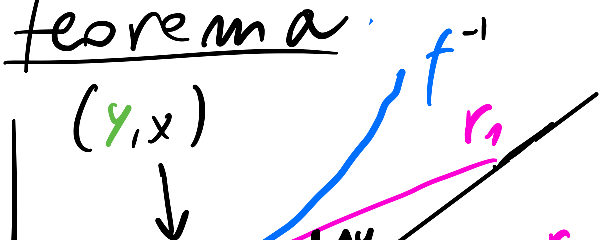
$\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Sea $f : I \longrightarrow J$ biyectiva y derivable, supongamos además que $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

$\Rightarrow (f^{-1})$ es derivable y

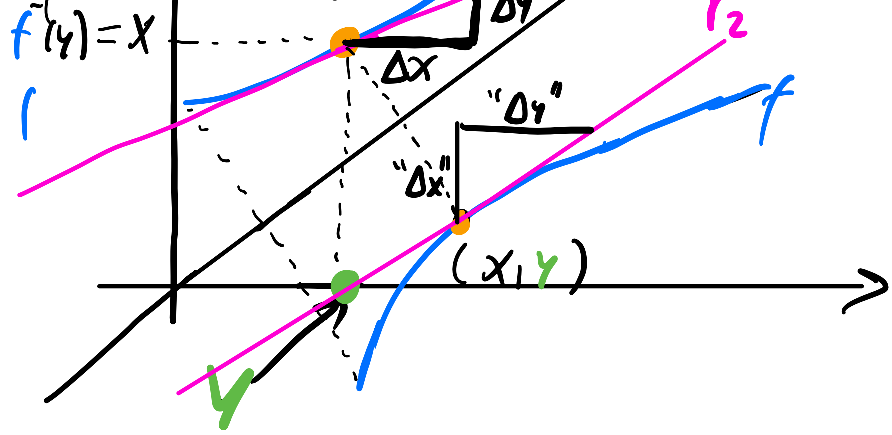
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

<u>Idea de porqué es cierto el teorema</u>:



$$(f^{-1})'(y) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

pendiente de la recta Tangente



Asumiremos que si f es derivable y $f'(x)\neq 0$ $\forall x \in I$
$\Rightarrow f^{-1}$ es derivable

Pendiente de r_2, por ser el reflejado de r_1, es el inverso de la pendiente de r_1. Es decir que la pendiente de r_2 es $\dfrac{1}{(f^{-1})'(y)}$

Como la pendiente de r_2 es $f'(x)$
$= f'(f^{-1}(y))$

Concluimos que $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Pendiente

de r_1

$$\frac{-1}{(\text{pendiente de } r_2)}$$

∎

Otra manera de deducir la fórmula de la derivada de la inversa

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in J$$

derivando de ambos lados:

$$(f \circ f^{-1})' = (x)' \underset{(*)}{=} 1 \quad \forall x \in J$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\boxed{(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

$$\left(f\left(f^{-1}\right)\right)'(x) = f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)$$

Entonces, por $\circledast$

$$1 = f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Ejemplos de derivadas de funciones inversas

$\log : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ biyectiva, continua y derivable.

$$(\log)'(x) = \frac{1}{x}$$

en particular $\log'(x) \neq 0$
$\forall x \in (0,+\infty)$

Por el teorema que vimos recién, $\log^{-1}$ es derivable.

$$\boxed{\log^{-1}(x) = e^x}$$

ES NUESTRA DEFINICIÓN DE e^x

Es decir (e^x) es derivable

$$(e^x)' = (\log^{-1})' = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))}$$

Es la fórmula de la derivada de la inversa para $f = \log(x)$

$$\log'(x) = \frac{1}{x}$$

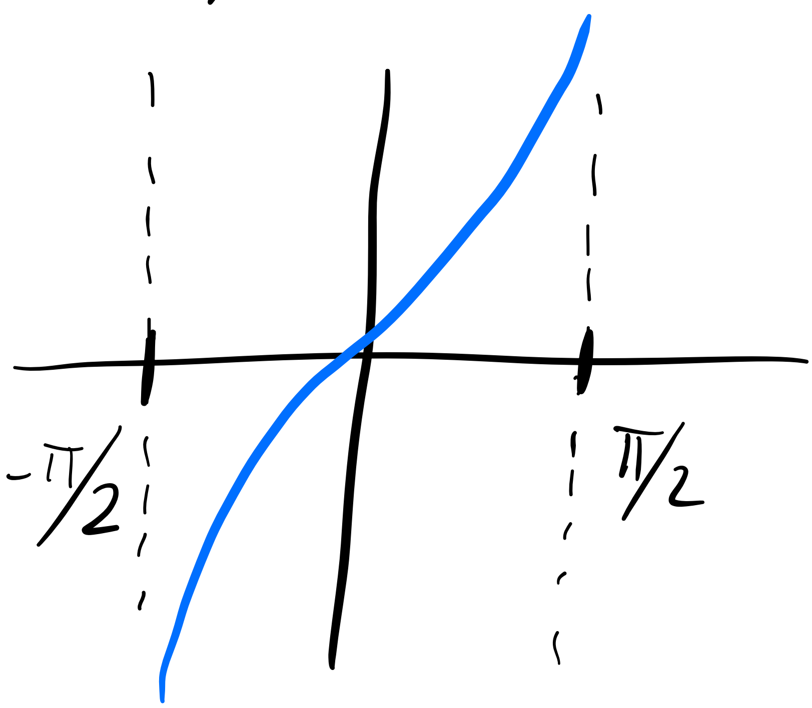
$$\log^{-1}(x) = e^x$$

Entonces, sustituyendo:

$$(e^x)' = \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'} = e^x$$

En conclusión: $\boxed{(e^x)' = e^x}$

$tg : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva



$$(tg)'(x) = \left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right)' =$$

$$= \frac{sen'(x)\,cos(x) - sen(x)\,cos'(x)}{cos^2(x)} =$$

$$= \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \boxed{\frac{1}{cos^2(x)}}$$

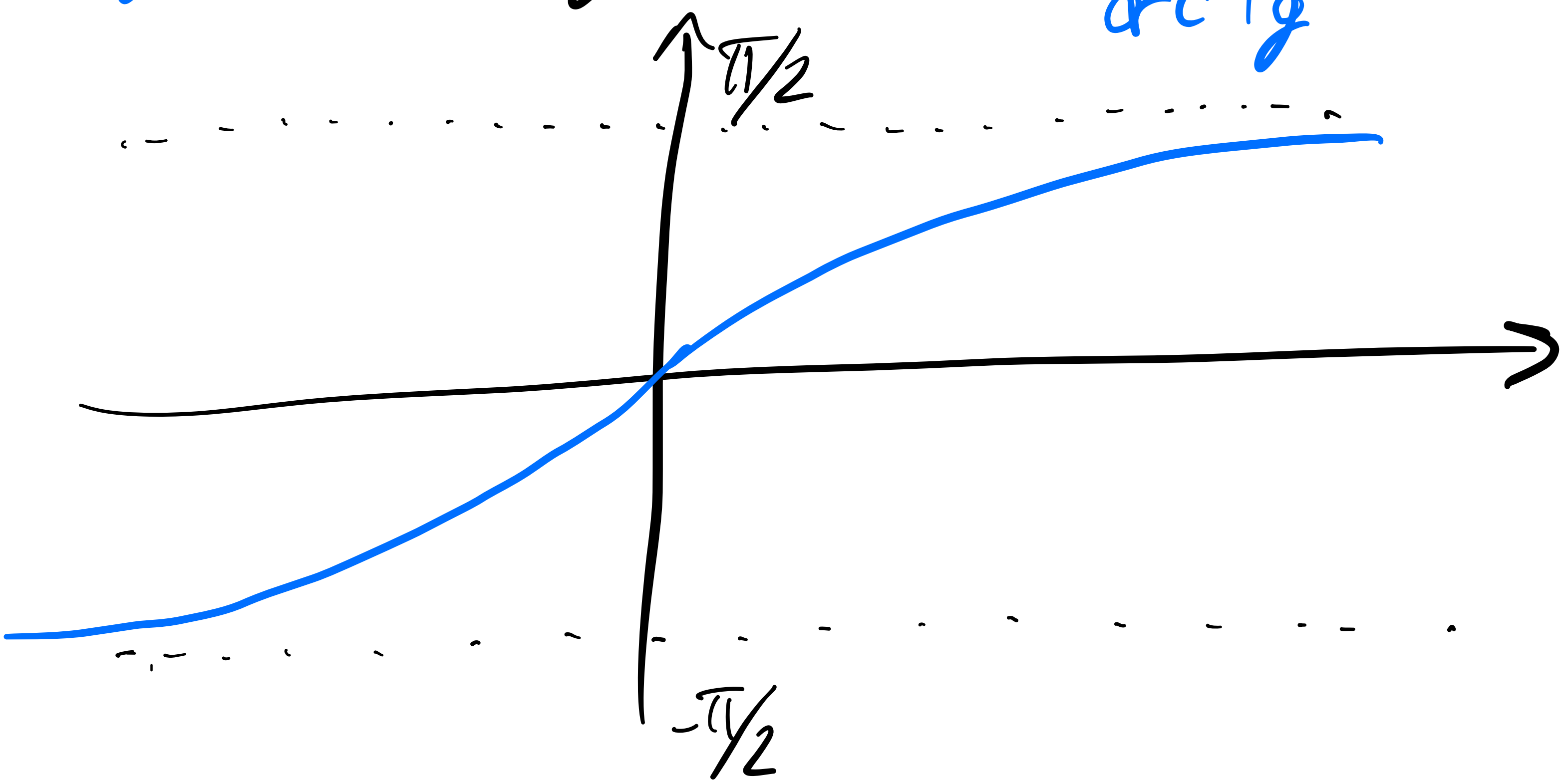
Truquito que nos va a servir

$$\boxed{\frac{1}{cos^2(x)}} = \frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{cos^2(x)} =$$

$$= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + 1 = \boxed{1+tg^2(x)}$$

Es decir $\boxed{tg'(x) = 1 + tg^2(x)}$

$$tg^{-1} = arctg : \mathbb{R} \to \left(-\pi/2, \pi/2\right)$$



Apliquemos la fórmula

de la derivada de la inversa

para $f = tg$
$f^{-1} = arctg$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

$$(tg^{-1})'(x) = arctg'(x) =$$

$$= \frac{1}{tg'(tg^{-1}(x))}$$

$tg' = 1 + tg^2$, sustituyendo

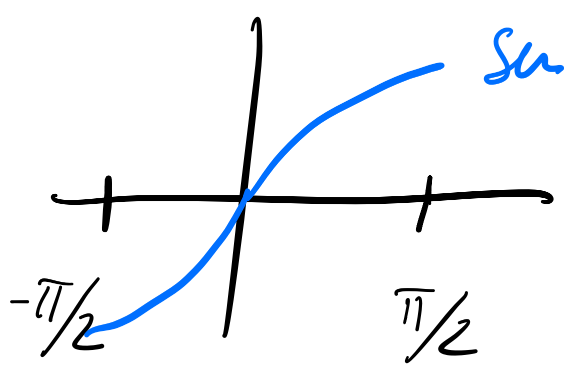
$$\boxed{arctg'(x)} = \frac{1}{1 + (tg(tg^{-1}(x)))^2} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{1 + x^2}}$$

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2(tg^{-1}(x))}\right)} =$$

$$= \cos^2(tg^{-1}(x))$$

$$\sin : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow (-1, 1)$$



$\arcsin : (-1,1) \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

$$\boxed{\arcsin'(x) = (\operatorname{sen}^{-1})'(x) = \\ = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{sen}^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x))}}$$

(*)

Recordar que $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1 \Rightarrow$

$\cos^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 \Rightarrow \boxed{\cos = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2}}$

sustituimos (*)

$$\boxed{\arcsin'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\underbrace{\operatorname{sen}^{-1}(x)}_{x}))^2}} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

<u>Ejercicio:</u> $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$