TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN EN PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Dr. Víctor M. Albornoz

Departamento de Industrias.

Campus Santiago Vitacura, Chile.

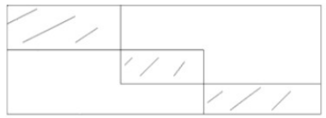
Universidad Técnica Federico Santa María

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, UdelaR.

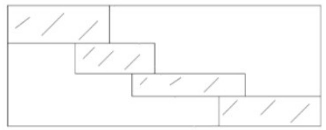
Montevideo, lunes 19 de Mayo de 2025

CONTENIDO

1. Introducción a los Métodos de Descomposición.
2. Formulación y resolución de modelos en AMPL.
3. Método de Benders.
4. Generación de Columnas.



5. Método de Dantzig & Wolfe.



6. Conclusiones, Extensiones y palabras finales.

3. Método de Benders.

El Método de Benders se publicó el año 1962 como método aplicado a problemas con determinada estructura, dando origen a la resolución de un *problema maestro* y otro con las restricciones con estructura especial, cuya resolución generalmente da origen a uno o varios *subproblemas*.

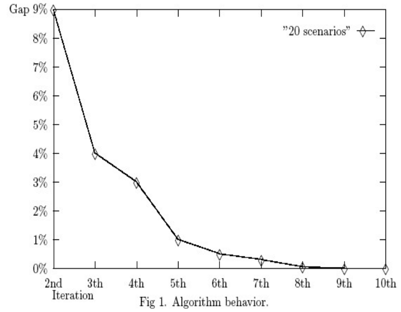


Fig 1. Algorithm behavior.

A continuación se presenta los principales detalles del método dado el siguiente modelo de Programación Lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & cx + dy \\
\text{s.a.} \quad & Ax = b \\
& Tx + Wy \leq h \\
& x \geq 0, \; y \geq 0.
\end{aligned}
$$

El modelo anterior puede ser representado (por proyección) de manera equivalente como:

$$\begin{aligned} &\text{Min } cx + \text{Min } \{dy \ / \ Wy \leq h - Tx, \ y \geq 0\} \\ &\text{s.a. } Ax = b \\ &\qquad x \geq 0. \end{aligned}$$

siempre que para cada $x \geq 0$ y $Ax=b$, se cumpla que el *problema* $\text{Min } \{dy \ / \ Wy \leq h - Tx, \ y \geq 0\}$ posea solución óptima.

Problema Dual. Dado el problema primal con la estructura mostrada a la izquierda (derecha), su respectivo problema dual se muestra a la derecha (izquierda). Notación: a_i es una fila de la matriz de restricciones y A_j una columna de la misma:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \\
\text{s.a.} & \mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq b_i & i \in \mathbf{M}_1 \\
& \mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i & i \in \mathbf{M}_2 \\
& \mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i & i \in \mathbf{M}_3 \\
& x_j \geq 0 & j \in \mathbf{N}_1 \\
& x_j \leq 0 & j \in \mathbf{N}_2 \\
& x_j \in \Re & j \in \mathbf{N}_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & \mathbf{b}^T\pi & \\
\text{s.a.} & \pi_i \geq 0 & i \in \mathbf{M}_1 \\
& \pi_i \leq 0 & i \in \mathbf{M}_2 \\
& \pi_i \in \Re & i \in \mathbf{M}_3 \\
& \mathbf{A}_j^T\pi \leq c_j & j \in \mathbf{N}_1 \\
& \mathbf{A}_j^T\pi \geq c_j & j \in \mathbf{N}_2 \\
& \mathbf{A}_j^T\pi = c_j & j \in \mathbf{N}_3
\end{array}
$$

Por teoría de dualidad en Programación Lineal formulamos el dual del problema proyectado y por lo tanto el problema inicial también equivale a resolver:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & cx + \text{Max}\,\{(h-Tx)u \,/\, W^T u \leq d,\ u \leq 0\} \\
\text{s.a.} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Dado que el problema dual posee solución óptima, esta se alcanza en un vértice del poliedro $\{u \,/\, W^T u \leq d,\ u \leq 0\}$.

Denotando por u^i, para $i=1,\ldots,l$, dichos vértices, el problema equivale igualmente a resolver:

$$\begin{aligned} \text{Min}\ \ & cx \ +\ \max_{i=1\ldots,l}\{(h-Tx)u^i\} \\ \text{s.a.}\ \ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Empleando una reformulación en términos de un modelo lineal (agregando la variable z), el problema anterior es equivalente al siguiente modelo, llamado *Problema Maestro*:

$$
\begin{aligned}
\text{(PM)}\quad \text{Min}\quad & cx + z \\
\text{s.a.}\quad & z \geq (h - Tx)u^i \qquad i=1,\ldots,l \\
& Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

La estrategia de resolución consiste entonces en resolver un *Problema Maestro Reducido* (PMR) que contiene solo aquellas restricciones que el propio método genera iteración a iteración (a partir de los respectivos vértices generados), digamos:

$$
\text{(PMR)} \quad \begin{aligned}
&\text{Min } cx + z \\
&\text{s.a.} \quad z \geq (h - Tx)u^i \qquad i=1,\ldots,k-1 \qquad (\, k<<l \,) \\
&\qquad\quad Ax = b \\
&\qquad\quad x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Denotando por $(\bar{x}, \bar{z})$ la solución óptima del Maestro Reducido (PMR), esta también será la solución óptima del Problema Maestro (PM) si y solo si:

$$\bar{z} \geq (h - T\bar{x})u^{i} \qquad i = 1, \ldots, l$$

¿Cómo verificar estas relaciones si al cabo de la *k-ésima* iteración del método sólo conocemos k−1 de las l restricciones?

Lo anterior es posible de verificar resolviendo el siguiente Subproblema:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Max}\ (h - T\overline{x})u \\
&\mathrm{s.a}\quad W^T u \le d, \\
&\qquad\quad u \le 0.
\end{aligned}
$$

En efecto, denotando por u^k el vértice y solución óptima del Subproblema, la condición de optimalidad del (PM) se verifica ssi: $\overline{z} \ge (h - T\overline{x})u^k$

Si lo anterior no se cumple, esto quiere decir que hemos encontrado un nuevo vértice del poliedro $\{u \,/\, W^T u \leq d,\ u \leq 0\}$.

Dado lo anterior, se agrega al problema Maestro Reducido (PMR) la nueva restricción: $z \geq (h - Tx)u^k$

El método termina en un número finito de pasos pues la cantidad de vértices de un poliedro es finita.

Ejemplo 1. Resolveremos mediante Benders:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & -2x_1 + x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

El problema es equivalentemente a resolver:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Min} & -2x_1 & + & \text{Min} & x_2 \\
\text{s. a.} & 0 \leq x_1 \leq 2 & & \text{s. a.} & x_2 - 4x_3 \leq 2 - 2x_1 \quad (\lambda_1) \\
& & & & x_2 - x_3 \geq 1 - x_1 \quad (\lambda_2) \\
& & & & x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Por Teoría de Dualidad, el problema anterior es equivalente a resolver:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Min} & -2x_1 + & \text{Max} & (2-2x_1)\lambda_1 + (1-x_1)\lambda_2 \\
\text{s. a.} & & \text{s. a.} & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \qquad (x_2) \\
 & 0 \leq x_1 \leq 2 & & -4\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \qquad (x_3) \\
 & & & \lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \geq 0
\end{array}
$$

Notar que el poliedro

$$D=\{(\lambda_1,\lambda_2) \,/\, \lambda_1+\lambda_2 \leq 1,\ -4\lambda_1-\lambda_2 \leq 0,\ \lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \geq 0\}$$

es un conjunto cerrado y acotado.

Denotaremos ahora los vértices del conjunto D por $(\lambda_1^{(i)},\lambda_2^{(i)})$ para $i=1,\ldots,I$, con lo cual el problema es equivalente a resolver:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -2x_1 \ + \ \max_{i=1,\ldots,I} \{(2-2x_1)\lambda_1^{(i)} + (1-x_1)\lambda_2^{(i)}\} \\ \text{s. a.} & 0 \leq x_1 \leq 2 \end{array}$$

O bien equivalente al Problema Maestro:

$$\begin{array}{lll} \text{(PM)} & \text{Min} & -2x_1 \ + \ z \\ & \text{s. a.} & z \geq (2-2x_1)\lambda_1^{(i)} + (1-x_1)\lambda_2^{(i)} \quad i=1,\ldots,I, \\ & & 0 \leq x_1 \leq 2 \end{array}$$

En la k-ésima iteración, el método de Benders considera un Problema Maestro Reducido con parte de las I restricciones de optimalidad, digamos el problema:

$$\begin{array}{lll}
\text{(PMR)} & \text{Min} & -2x_1 + z \\
& \text{s. a.} & z \geq (2 - 2x_1)\lambda_1^{(i)} + (1 - x_1)\lambda_2^{(i)} \quad i=1,\ldots,k-1, \\
& & 0 \leq x_1 \leq 2
\end{array}$$

Suponga que el (PMR) tiene por solución óptima $(\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}},\mathbf{z}^{\mathbf{k}})$, por lo tanto esta también será óptima para el Problema Maestro (PM) en la medida que cumpla:

$$\mathbf{z}^{\mathbf{k}} \geq (2 - 2\,\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\lambda_1^{(i)} + (1 - \boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\lambda_2^{(i)} \quad \text{para todo} \quad i=1,\ldots,I \quad \mathbf{(*)}$$

Lo anterior es posible de verificar resolviendo el siguiente **Subproblema** (dual):

$$
\begin{array}{lll}
(SP) & \text{Max} & (2-2\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\lambda_1 + (1-\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\lambda_2 \\
 & \text{s. a.} & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \qquad (x_2) \\
 & & -4\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \qquad (x_3) \\
 & & \lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \geq 0
\end{array}
$$

En efecto, si $(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)})$ denota la solución óptima de (SP), la condición **(*)** es equivalente a verificar que la satisface el valor óptimo de (SP), esto es si:

$$\mathbf{z^k} \geq (2 - 2\,\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\boldsymbol{\lambda_1}^{\mathbf{(k)}} + (1 - \boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\boldsymbol{\lambda_2}^{\mathbf{(k)}}$$

Que de cumplirse, el algoritmo termina con $(\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}},\mathbf{z^k})$ como solución óptima del (PM).

En caso que esto no se cumpla, se agrega al (PMR) la (nueva) restricción:

$$z \geq (2 - 2x_1)\boldsymbol{\lambda_1}^{\mathbf{(k)}} + (1 - x_1)\boldsymbol{\lambda_2}^{\mathbf{(k)}}$$

Primera Iteración (k=1)

Resolvemos (PMR) sin la variable z y sin restricciones de optimalidad. Se fija $\mathbf{z^1=-\infty}$

Solución óptima: $\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{1}} = 2$

Alternativa, dar cualquier solución factible $(0 \leq x_1 \leq 2)$

Resolvemos el (SP), obteniendo: $(\boldsymbol{\lambda}_1^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_2^{(1)})=(0,0)$

La condición (*) no se cumple. Se agrega al (PMR) la (primera) restricción de optimalidad: $z \geq 0$

Segunda Iteración (k=2)

Resolvemos (PMR) con la primera restricción de optimalidad

Solución óptima: $\boldsymbol{x_1}^2=2$ y $\mathbf{z}^2= 0$

Resolvemos el (SP), obteniendo: $(\boldsymbol{\lambda}_1^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_2^{(1)})=(0,0)$

La condición (*) ahora se cumple pues equivale a $0\geq 0$ y se ha alcanzado la solución óptima del (PM).

La solución óptima en las variables originales equivale entonces a:

$$x_1=2,\ \ x_2=0,\ x_3=x_3\ \ (1/2\leq x_3\leq 1)$$

Ejemplo 2. Resolveremos en clases el siguiente problema mediante el Método de Benders:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Min} & 6x + & 5y_1 + & 4y_2 + & 6y_3 + & 3y_4 & & \\
\text{s.a.} & x + & & & y_3 & & \geq 2 & \\
 & x + & y_1 + & 2y_2 & & + \; y_4 & \geq 3 & \\
\end{array}
$$

$$0 \leq x \leq 5/2,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0.$$