

Derivada del cociente

Sean $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivables y tal que $g(x) \neq 0 \forall x \in I$.

Entonces $\left(\frac{f}{g}\right)$ es derivable en I y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Veamos alguna prueba:

La clase pasada vimos que si f, g derivables entonces $(f+g)$ es derivable y $(f+g)' = f' + g'$

Para ver que $(f+g)$ es derivable tenemos que calcular

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} \stackrel{?}{=} f'(x_0) + g'(x_0)$$

$(f+g)'(x_0)$

Reescribimos:

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) + \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

USAMOS LA
HIPÓTESIS DE
QUE f Y g
SON DERIVABLES
EN x_0

Ejemplo:

$$\left(\frac{(3x^2 + 1) \sin(x)}{\log(x)} \right)' = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' \text{ donde } f(x) = (3x^2 + 1) \sin(x) \text{ y } g(x) = \log(x)$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$f(x) = (3x^2 + 1) \sin(x) = f_1(x) f_2(x) \text{ donde } f_1(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f_1' = 6x \text{ y } f_2(x) = \sin(x) \Rightarrow f_2' = \cos(x)$$

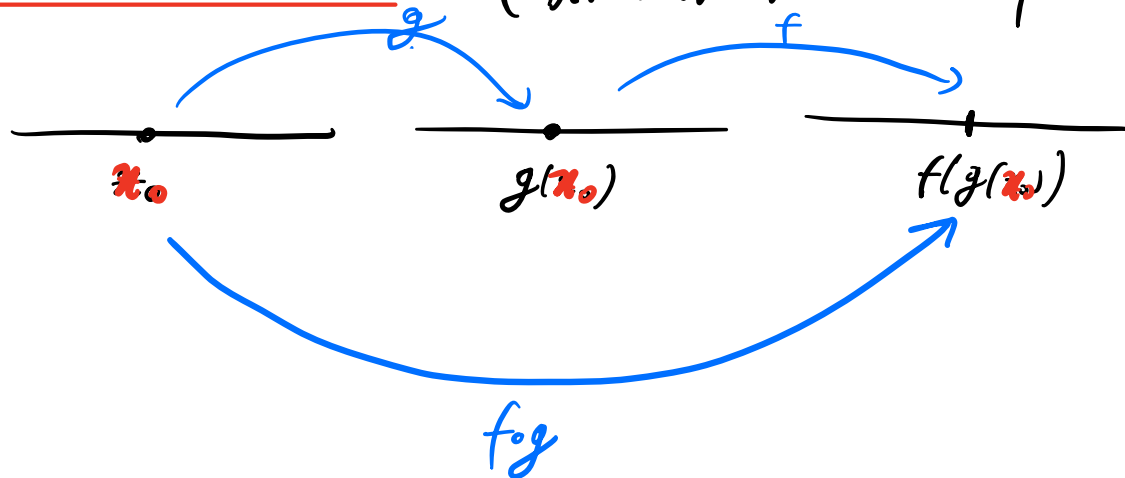
$$\boxed{f'(x)} = \left(f_1(x) f_2(x) \right)' = \underset{\substack{\text{Regla de} \\ \text{Leibniz}}}{f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x)} = \boxed{6x \cdot \sin(x) + (3x^2 + 1) \cos(x)}$$

Por otro lado $\boxed{g'(x)} = (\log(x))' = \boxed{\frac{1}{x}}$

ESTAMOS EN CONDICIONES DE SEGUIR:

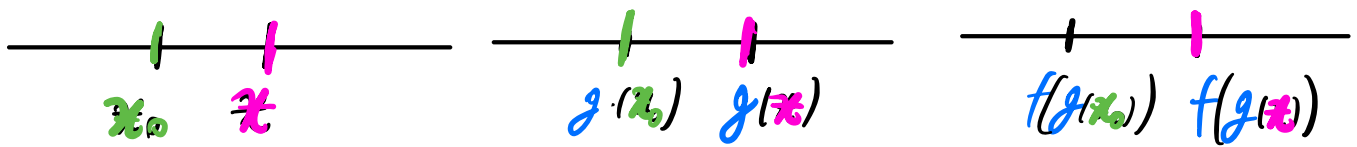
$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{\overbrace{(6x \sin(x) + (3x^2 + 1) \cos(x))}^{f'} \cdot \overbrace{\log(x)}^{g'} - \overbrace{(3x^2 + 1) \sin(x)}^f \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}^{g'}}{\underbrace{\log^2(x)}_{g^2}}$$

Regla de la cadena (Derivada de la composición)



Si g es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$
 Entonces $(f \circ g)$ es derivable en x_0 y

$$\boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)}$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = (f \circ g)'(x_0)$$

"Idea de porqué es cierta"

$$(f \circ g)'(x_0) \approx \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Si x muy cerca de x_0

Porque $g(x)$ muy cerca de $g(x_0)$

Porque g continua en x_0 y x muy cerca de x_0

Porque x muy cerca de x_0

Ejemplos:

$$\left(\log(3x^2 + 5) \right)' = \left(f(g(x)) \right)'$$

donde

$$f(x) = \log(x) \Rightarrow f'(x) = 1/x$$

$$g(x) = 3x^2 + 5 \Rightarrow g'(x) = 6x$$

Por la regla de la cadena:

$$\left(f(g(x)) \right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \left(\frac{1}{3x^2 + 5} \right) \cdot 6x = \boxed{\frac{6x}{3x^2 + 5}}$$

$$h(x) = \sin(\log(x^2 + 1)) = f(g(x))$$

donde $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

$$g(x) = \log(x^2 + 1) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Por la regla de la cadena

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$g(x) = \log(x^2 + 1) = g_1(g_2(x)) \quad \text{donde}$$

$$g_1(x) = \log(x) \Rightarrow g_1'(x) = 1/x$$

$$g_2(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g_2' = 2x$$

Aplicamos la regla de la cadena para derivar g

$$g'(x) = (g_1(g_2(x)))' = g_1'(g_2(x)) \cdot g_2'(x)$$

Regla de la cadena

Entonces $g'(x) = \left| \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1} \right|$ 

Ahora podemos continuar el cálculo de arriba:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(\log(x^2 + 1)) \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$$

donde $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$
 $g(x) = \log(x^2 + 1) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 

Teorema de L'Hopital

Sean f, g funciones derivables
sobre un intervalo (a, b) y $x_0 \in (a, b)$.

Supongamos además que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Entonces, si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se

tiene que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Leftarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \\ g(x) &= x \Rightarrow g'(x) = 1 \end{aligned}$$

L'Hopital dice que para resolver la

Indeterminación podemos estudiar
el límite del cociente de las
derivadas.

Ejemplo: Veamos que $\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$
cuando $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

Diagrama de signos para el límite: $\frac{0}{0}$ con flechas indicando que tanto el numerador como el denominador se acercan a 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) - 1 \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \\ g(x) &= -\frac{x^2}{2} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x = -x \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{-x}$$

Diagrama de signos para el límite: $\frac{0}{0}$ con flechas indicando que tanto el numerador como el denominador se acercan a 0.

Volviendo a derivar

$$(-\sin(x))' = -\cos(x)$$

$$(-x)' = -1$$

L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{-1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{-x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

L'Hopital

L'Hopital (II)

Sean f, g funciones derivables
sobre un intervalo (a, b) y $x_0 \in (a, b)$.

Supongamos además que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

Entonces, si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se

tiene que
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$