

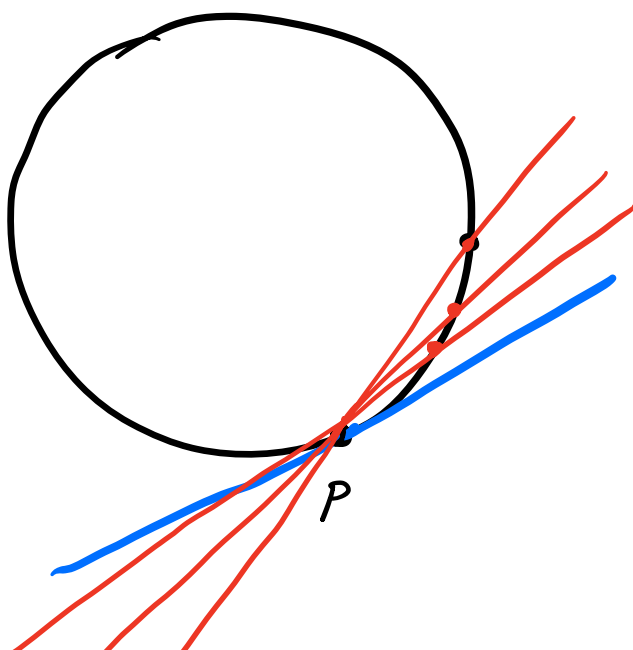
En cinemática: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ describe la posición de una partícula en el tiempo



Velocidad Media en el intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$
es $\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$

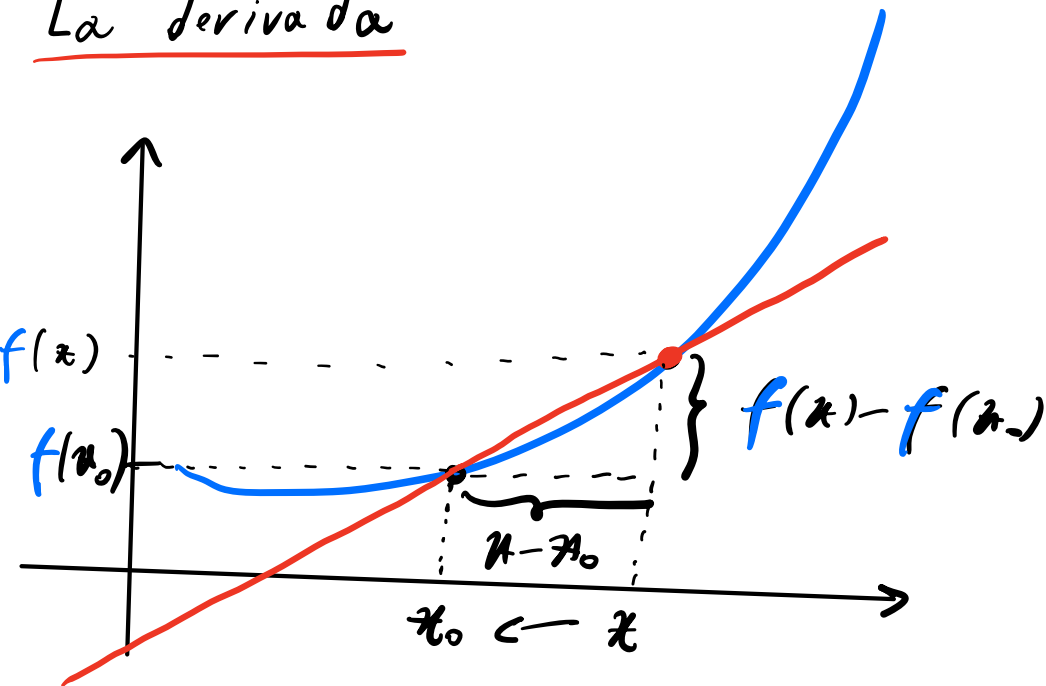
La Velocidad instantánea en el instante t_0
es $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$

En geometría



La recta
Tangente

La derivada



Decimos que f es derivable en x_0 si

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

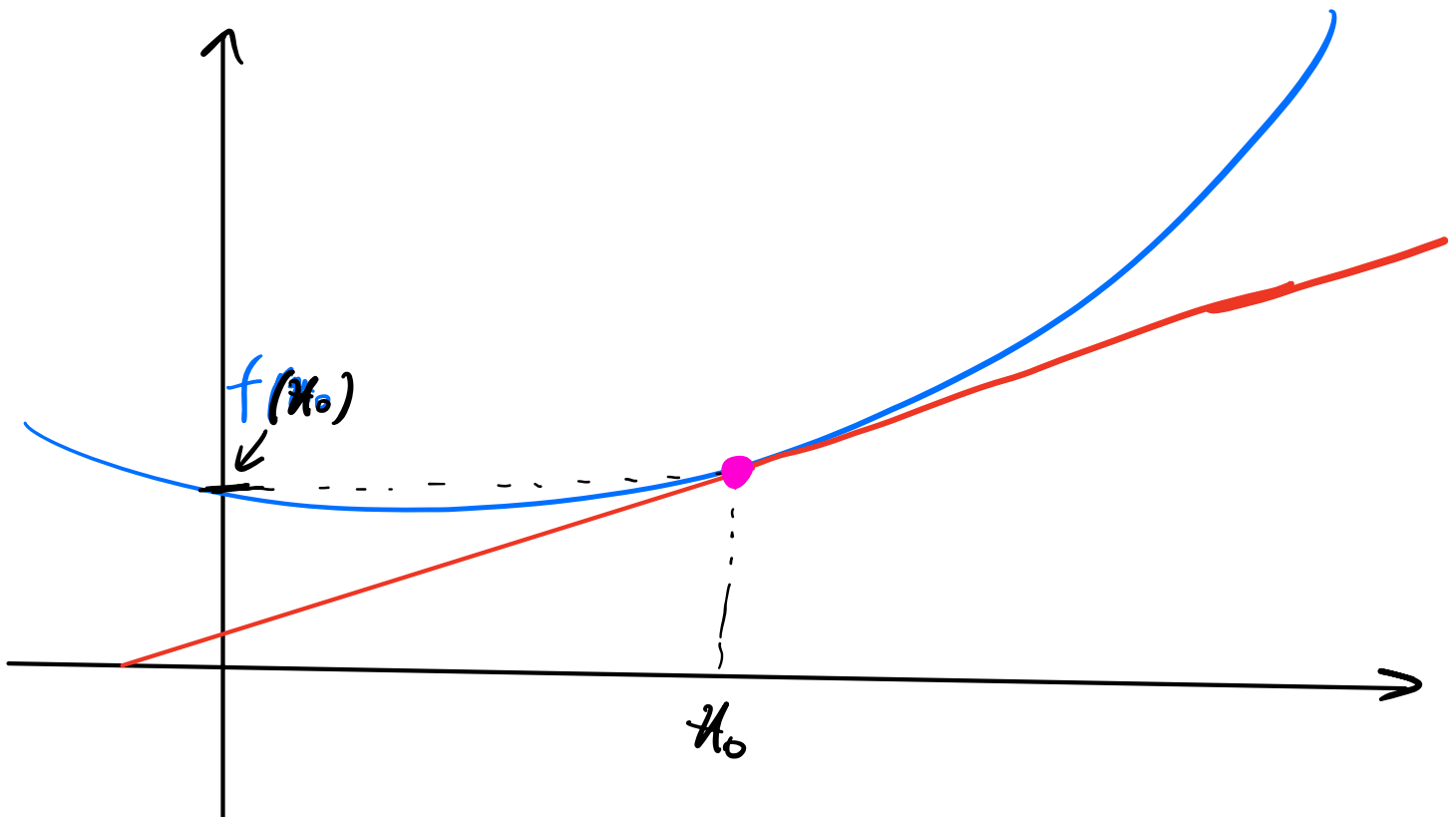
Y es finito

Al valor de ese límite lo llamamos

la derivada de f en x_0 y lo anotamos

$$f'(x_0)$$

La recta tangente al gráfico de f por el punto $(x_0, f(x_0))$



La pendiente de la recta tangente es $f'(x_0)$
además queremos que la recta pase por
el punto $(x_0, f(x_0))$

$$r(x) = \boxed{f'(x_0)} \cdot x + n$$

Constante

$$r(x_0) = f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + n$$

$$\Rightarrow n = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

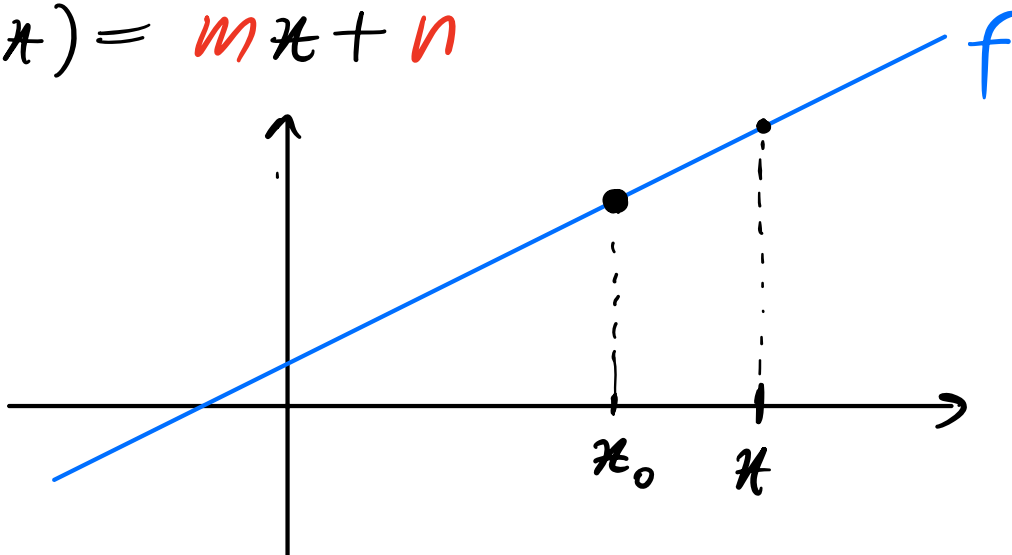
Entonces, la fórmula de la recta Tangente por $(x_0, f(x_0))$ es

$$r(x) = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$$

son constantes

Ejemplos: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

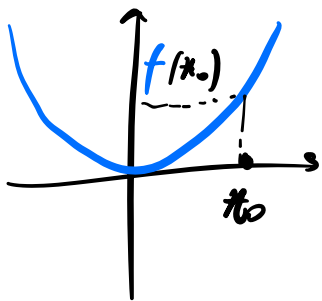
$$f(x) = mx + n$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(mx + n) - (mx_0 + n)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m \cancel{(x - x_0)}}{\cancel{(x - x_0)}} = m \Rightarrow \boxed{f'(x_0) = m}$$

Ejemplo: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0) \cancel{(x - x_0)}}{\cancel{(x - x_0)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = \boxed{2x_0}$$

$(x^2 - x_0^2) = (x + x_0)(x - x_0)$

Entonces $g'(x_0) = 2x_0$.

Observar que para x positivo $g'(x)$ es positivo, mientras que para x negativos $g'(x)$ es negativo. Esto está en concordancia con el crecimiento / decrecimiento de la función como veremos más adelante.

La misma idea podríamos haberla planteado:

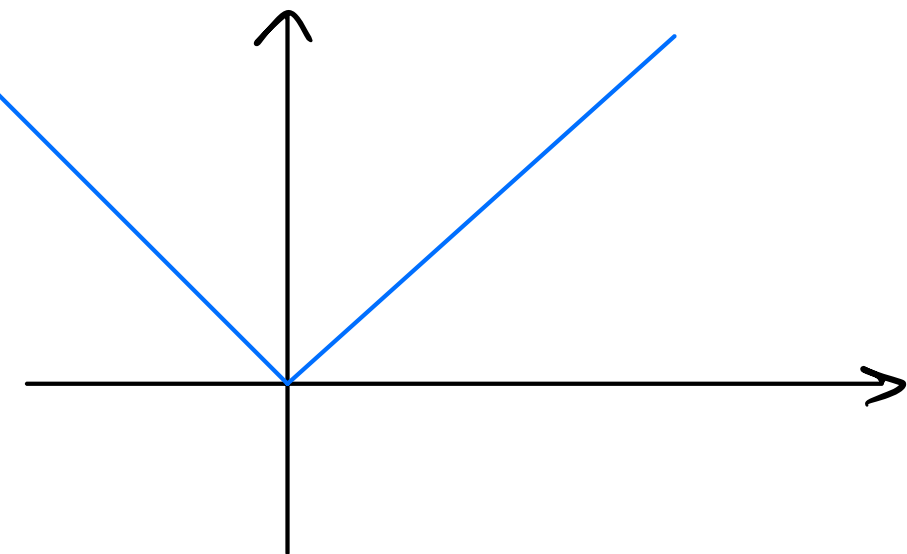
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{CV}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$x = x_0 + h$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0\cancel{h} + \cancel{h^2} - x_0^2}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

No ejemplo: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

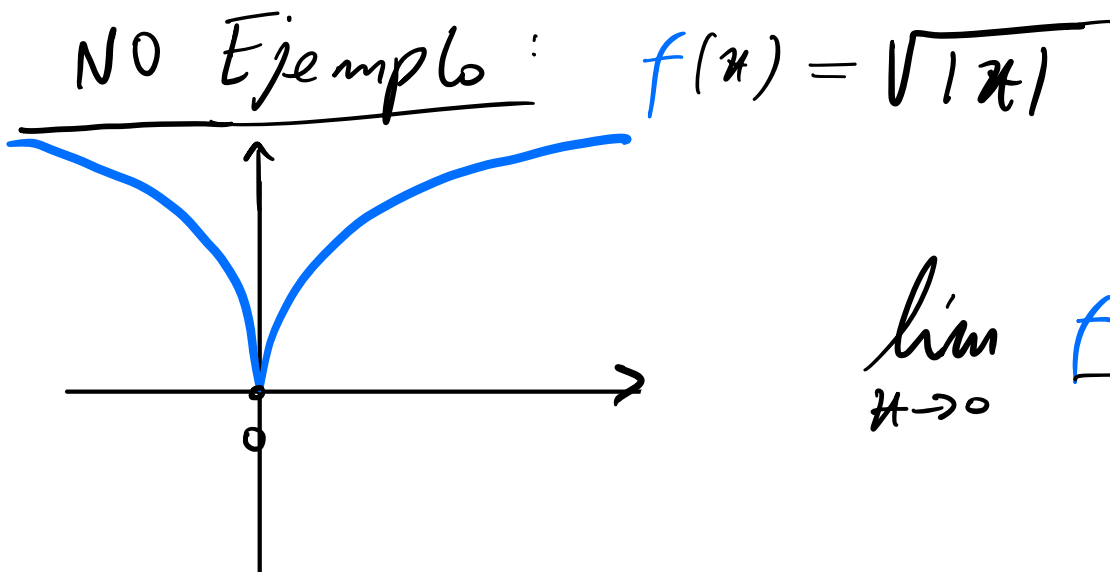


$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x-0}{x-0} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x-0}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

Por lo Tanto ~~$\exists$~~ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$

es decir h no es derivable en 0.

"la función no es derivable donde el gráfico tiene "piguitos" "



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$\downarrow$
 0^+

Como el límite lateral del cociente incrementado es infinito ya vemos que f no es derivable en 0.

Teorema: Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0 .

Dem: Para ver que f es continua en x_0 hay que ver que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

$f(x_0)$

$$x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= 0$$

Porque f
es derivable
en x_0

"derivable implica continuo"

Como vimos recién, el recíproco
no es cierto, ya que $|x|$
es continuo en 0, pero
no es derivable en 0.

Más ejemplos: $(\log(x))' = \frac{1}{x}$

Recordar que $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

la misma función

NO ES CASUALIDAD

Spoiler: Teorema fundamental del cálculo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$\left. \begin{aligned} (\sin(x))' &= \cos(x) \\ (\cos(x))' &= -\sin(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{VAMOS} \\ \text{A} \\ \text{ASUMIRLO} \end{array}$$

Álgebra de derivadas

Sean $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivables

en $x_0 \in I$. Entonces $f+g$ es derivable

en x_0 y $f \cdot g$ es derivable en x_0 .

Ade más:

$$\begin{aligned} \text{I } (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ \text{II Si } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\alpha f)' &= \alpha(f') \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{I } (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ \text{II Si } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\alpha f)' &= \alpha(f') \end{aligned}} \right\} \text{Linealidad de la derivada}$$

$$\text{III } (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \left. \vphantom{(f \cdot g)'(x_0)} \right\} \text{Regla de Leibnitz}$$

Regla de Leibnitz

Ej:

$$(x^3)' = \left(\underbrace{x}_f \cdot \underbrace{x^2}_g \right)' = \underbrace{(x)'}_{f'} \underbrace{x^2}_g + \underbrace{x}_f \underbrace{(x^2)'}_{g'} =$$

$$= 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$$

En general: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$(7x^3 - 4x + 2)' = (7x^3)' + (-4x)' + (2)' =$$

Linealidad
I

$$= 7(x^3)' - 4(x)' + (2)' = 7 \cdot (3x^2) - 4 \cdot 1 + 0 =$$

$$= 21x^2 - 4$$

YA PODEMOS DERIVAR POLINOMIOS

Cuando $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es

derivable en todo $x \in I$,

Definimos la función derivada

$f': I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

a cada $x \in I$ le asocia el valor de

1ª derivada de f en $\mathbb{H}$.
