Realizabilidad Clásica de Krivine

Mauricio GUILLERMO. FIng/UdelaR

Julio 2021
Escuela de Ciencias Informáticas
Exactas/UBA.

- En Realizabilidad Intuicionista, el absurdo ($\perp$) no tiene realizadores.
- Se interpreta la negación $\neg A$ como el espacio de funciones de tipo $A \Rightarrow \perp$, que sólo puede tomar dos valores:
  - Vacío, cuando la interpretación de A es no vacía.
  - Todos los realizadores, cuando la interpretación de A es vacía.

Entonces: $\neg\neg A$ **no tiene contenido computacional.**

- No podemos encontrar realizadores uniformes (i.e.: uniformes en A) de $\neg\neg A \Rightarrow A$. Para escribir un realizador de $\neg\neg A \Rightarrow A$ no queda más remedio que conocer un realizador de A.
- Definir una Realizabilidad Clásica requiere reformular las definiciones desde el nivel más básico.

- En 1990 T. Griffin descubre que la instrucción de control `call/cc` tiene el tipo $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$, fórmula que expresa la *ley de Peirce*.
- Una *continuación* guarda el *estado de la ejecución* en un momento dado.
- `call/cc` crea una continuación qua guarda la información acerca del *estado corriente de la ejecución* y se la pasa a su argumento (función) como un *valor de primera clase*.
- Este descubrimiento da una interpretación computacional *directa* para los razonamientos clásicos (e.g.: tercero excluído).
- Algunos λ-cálculos clásicos:
    - $\lambda\mu$-cálculo de Parigot.
    - λ-cálculo simétrico de Barbanera y Berardi.
    - $\overline{\lambda}\mu$-cálculo de Curien y Herbelin.
    - **λ_c-cálculo de Krivine**. Nos ocuparemos de esta presentación.

El λ_c-cálculo de Krivine

$$
\begin{array}{rrrcll}
\text{Términos:} & (\Lambda) & t, u & ::= & x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathfrak{C} \mid k_\pi & \\
\text{Pilas:} & (\Pi) & \pi & ::= & \alpha \mid t \cdot \pi & t \text{ cerrado.} \\
\text{Procesos:} & (\Lambda \star \Pi) & p, p' & ::= & t \star \pi & t \text{ cerrado}
\end{array}
$$

Reglas de evaluación

$$
\begin{array}{lrcll rcl}
\text{(Push)} & tu & \star & \pi & \succ_1 & t & \star & u \cdot \pi \\
\text{(Pop)} & \lambda x.t & \star & u \cdot \pi & \succ_1 & t\{x := u\} & \star & \pi \\
\text{(Save)} & \mathfrak{C} & \star & t \cdot \pi & \succ_1 & t & \star & k_\pi \cdot \pi \\
\text{(Restore)} & k_\pi & \star & t \cdot \rho & \succ_1 & t & \star & \pi
\end{array}
$$

Términos Proof-like

PL es el conjunto de λ_C-términos cerrados y sin continuaciones (i.e.: sin k_π's). *Idea:* Los términos que se obtienen por demostraciones no contienen continuaciones.

La KAM puede incorporar nuevas instrucciones con sus respectivas reglas de evaluación.

Ejemplos de posibles instrucciones adicionales:

(Quote) $\quad \texttt{quote} \star t \cdot \pi \succ_1 t \star \overline{n}_\pi \cdot \pi$

(Eq) $\quad \texttt{eq} \star t_1 \cdot t_2 \cdot u \cdot v \cdot \pi \succ_1 \begin{cases} u \star \pi & \textbf{Si } t_1 \equiv t_2 \\ v \star \pi & \textbf{Si } t_1 \not\equiv t_2 \end{cases}$

(Fork) $\quad \pitchfork \star t_1 \cdot t_2 \cdot \pi \succ_1 \begin{cases} t_1 \star \pi \\ t_2 \star \pi \end{cases}$

- Agregando `quote` se puede realizar el **axioma de elección dependiente** (y entonces el **axioma de elección numerable**) (Krivine '03) **Ambos axiomas son ubicuos en el Análisis Clásico.**
- Agregando $\pitchfork$ es posible realizar el tipo del **parallel or:** $|\top \Rightarrow \bot \Rightarrow \bot| \cap |\bot \Rightarrow \top \Rightarrow \bot|$.

- La evaluación es *determinista* cuando $p' = p''$ siempre que $p \succ_1 p'$ y $p \succ_1 p''$ para algún proceso p.
- La menor relación de evaluación corresponde a la clausura transitiva de las reglas $(\textsc{Push})$, $(\textsc{Pop})$, $(\textsc{Save})$ y $(\textsc{Restore})$. Esta evaluación es determinista ya que cada regla lo es.
- Si agregamos a esta lista $(\textsc{Quote})$, la menor evaluación que las contiene es también determinista.
- En cambio, la regla de $(\textsc{Fork})$ es no determinista y cualquier evaluación que la contenga es no determinista.
- La evaluación induce en $\Lambda \star \Pi$ un **grafo orientado transitivo** y **reflexivo**: $(\Lambda \star \Pi, \succeq)$

- Dado un proceso p, el *hilo de ejecución de p* es $\mathbf{Th}(p)$:=$\{q \in \Lambda \star \Pi \mid p \succeq q\}$ (Los reducidos a partir de p).
- ($\mathbf{Th}(p)$,$\succeq$) es un grafo orientado transitivo y reflexivo. Posibles estructuras del grafo de un hilo determinista:
  - Finito y terminado en un *loop*:
$$\begin{tikzcd} Id\star\delta\delta\cdot\pi \arrow[r] & \delta\delta\star\pi \arrow[r, bend right] & \delta\star\delta\cdot\pi \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$
  - Finito y lineal: $Id\star Id\cdot\alpha \longrightarrow Id\star\alpha \not\longrightarrow$
  - Infinito y lineal:
$$\tilde{\delta}\star\tilde{\delta}\cdot\alpha \xrightarrow[1]{} \tilde{\delta}\tilde{\delta}Id\star\alpha \xrightarrow[2]{} \tilde{\delta}\star\tilde{\delta}\cdot Id\cdot\alpha \xrightarrow[3]{} \tilde{\delta}\star\tilde{\delta}\cdot Id\cdot Id\cdot\alpha \longrightarrow \bullet\bullet\bullet$$
  donde $\tilde{\delta} := \lambda x.xxId$
- En general, si hay instrucciones no deterministas un hilo tiene ramificaciones: Sean t_0, t_1 términos definidos por recursión mutua que cumplen ($\succ$ significa WHR): $\begin{cases} t_0 & \succ & \pitchfork t_0 t_1 0 \\ t_1 & \succ & \pitchfork t_0 t_1 1 \end{cases}$
Entonces $\mathbf{Th}(\pitchfork t_0 t_1)$ es un árbol binario infinito.

- La Realizabilidad Clásica de Krivine se definió inicialmente para la Aritmética Clásica de segundo orden (PA2).
- La aritmética de segundo orden tiene expresividad para manejar dos tipos de objetos:
  - Objetos de primer orden: son los números naturales.
  - Objetos de segundo orden: son los conjuntos de números naturales.
- Puesto que los reales se codifican como conjuntos de enteros (por ejemplo, como cortaduras de Dedekind, como PSMC, etc), en (PA2) tenemos expresividad para hablar de números reales. También podemos hablar de funciones reales contínuas (puesto que están determinadas por sus valores en $\mathbb{Q}$).
- **Ejercicio:** expresar en (PA2):
  - X es una sucesión de naturales.
  - X es un PSMC de racionales (i.e.: X es un real).
  - X es una función continua de $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.
  - Enunciar el Teorema de Bolzano.

Lenguaje de términos de primer orden y fórmulas de segundo orden:

$$
\begin{array}{rcl}
e_1, \ldots, e_k & ::= & x \mid f(e_1, \ldots, e_k) \\
A, B & ::= & X(e_1, \ldots, e_k) \mid A \Rightarrow B \mid \forall x.A \mid \forall X.A
\end{array}
$$

- $f, g, h, \ldots$ son símbolos de función con aridad $k \geq 0$.
- $x, y, z, \ldots$ variables de primer orden.
- $X, Y, Z, \ldots$ variables de segundo orden con aridad $k \geq 0$.

Como símbolos de función tomamos una *signatura* $\Sigma = \{0, \mathrm{s}, +, \times, \ldots\}$.

- Como en la lógica de primer orden, agregamos parámetros:

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
c, d, e, f, \ldots & \in \mathbb{N} & \text{parámetros de primer orden.} \\
C, D, E, F, \ldots & \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}^k} & \text{parámetros de segundo orden.}
\end{array}
\right.
$$

- Un *predicado* es una expresión de la forma $\lambda\vec{x}.P$ donde $P = P(\vec{x})$ es una fórmula (posiblemente con parámetros).

- Las variables libres y la α-conversión se definen de forma usual. La substitución en primer orden se define del modo usual, evitando la captura de variables libres.
- Sean:
  - X una variable de segundo orden y de aridad $k \geq 0$
  - $A = A(X)$ una fórmula de segundo orden.
  - Un parámetro C de la misma aridad que X.
  - Un predicado $\lambda\vec{x}.P$ con $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$.

  Entonces:

  1. La substitución $A\{X := C\}$ consiste en reemplazar cada ocurrencia de $X(e_1, \ldots, e_k)$ en A por $C(e_1, \ldots, e_k)$.
  2. La substitución $A\{X := \lambda\vec{x}.P\}$ consiste en reemplazar cada ocurrencia de $X(e_1, \ldots, e_k)$ en A por $P\{x_i := e_i\}_{i=1}^{k}$.

Codificación de conectivas y cuantificadores existenciales en (PA2) (Russell-Prawitz).

$$
\begin{array}{rcl}
\bot & \equiv & \forall X.X \\
\neg A & \equiv & A \Rightarrow \bot \\
A \wedge B & \equiv & \forall X.[(A \Rightarrow B \Rightarrow X) \Rightarrow X] \\
A \vee B & \equiv & \forall X.[(A \Rightarrow X) \Rightarrow (B \Rightarrow X) \Rightarrow X] \\
\exists x.A & \equiv & \forall X.[\forall x.(A \Rightarrow X) \Rightarrow X] \\
\exists X.A & \equiv & \forall Z.[\forall X.(A \Rightarrow Z) \Rightarrow Z]
\end{array}
$$

Igualdad de Leibniz: $(e_1 = e_2) \equiv \forall X.[X(e_1) \Rightarrow X(e_2)]$.

La fórmula dice que **todo** predicado que contiene a e_1, contiene a e_2.

¿Qué clase de definición de igualdad puede ser asimétrica?

¡Tenemos el esquema de comprensión en segundo orden!
Si $e_1 = e_2$, entonces $Xe_1 \Rightarrow Xe_2$ es cierta para todo X.
En particular para el predicado $P(x) := \lambda x.[Xx \Rightarrow Xe_1]$
Además $P(e_1) = (\lambda x.[Xx \Rightarrow Xe_1])e_1 = Xe_1 \Rightarrow Xe_1$ es cierta
así que $P(e_2) = (\lambda x.[Xx \Rightarrow Xe_1])e_2 = Xe_2 \Rightarrow Xe_1$ es cierta.

Esta prueba se formaliza en el sistema de deducción (NK2) (deducción natural clásica) de (PA2):

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\; A \in \Gamma \qquad\qquad \frac{}{\Gamma \vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x.A}\; x \notin F(\Gamma) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{x := e\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall X.A}\; X \notin F(\Gamma) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{X := E\}}\; (E \text{ parámetro o predicado})$$

Reglas derivadas (**Ejercicio**):

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \vee B \vdash C \quad \Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash C} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma, A\{x := e\} \vdash C \quad \Gamma \vdash \exists x.A}{\Gamma \vdash C}\, x \notin F(\Gamma, C) \qquad \frac{\Gamma \vdash A\{x := e\}}{\Gamma \vdash \exists x.A}$$

$$\frac{\Gamma, A\{X := E\} \vdash C \quad \Gamma \vdash \exists X.A}{\Gamma \vdash C}\, X \notin F(\Gamma, C) \qquad \frac{\Gamma \vdash A\{X := E\}}{\Gamma \vdash \exists X.A}$$

Proposición:

La igualdad es una relación de equivalencia. **Ejercicio.**

Esquema de Comprensión:

La siguiente fórmula es derivable (**Ejercicio**):

$$\underbrace{\forall \vec{Z} \quad \forall \vec{z}}_{\text{parámetros}} \ \exists X \forall \vec{x}[X(\vec{x}) \Leftrightarrow A(\vec{Z}, \vec{z}, \vec{x})].$$

- La fórmula A con parámetros $\vec{Z}, \vec{z}$ determina un *objeto de segunda clase*. El esquema dice que todo predicado (objeto sintáctico) tienen su "materialización" como un parámetro en el modelo (objeto semántico).
- Formalmente $(\lambda \vec{x}.A)\vec{e_i}$ expresa que $\vec{e_i} \in \lambda \vec{x}.A$.
- Definimos la inclusión del modo usual: $\lambda \vec{x}.A \subseteq \lambda \vec{x}.B$ significa $\forall \vec{y}\left[(\lambda \vec{x}.A)\vec{y} \Rightarrow (\lambda \vec{x}.B)\vec{y}\right]$ y la igualdad $\lambda \vec{x}.A = \lambda \vec{x}.B$ como $\lambda \vec{x}.A \subseteq \lambda \vec{x}.B$ y $\lambda \vec{x}.B \subseteq \lambda \vec{x}.A$.

- Con estas definiciones se prueba:

Esquema de Comprensión II:

$$\underbrace{\forall\vec{Z}\quad\forall\vec{z}}_{\text{parámetros}}\ \exists! X \forall\vec{x}[X(\vec{x}) \Leftrightarrow A(\vec{Z},\vec{z},\vec{x})].$$

- En particular podemos definir a los enteros de Dedekind:

$$\mathrm{Nat}(x) := \forall Z[\forall y(Z(y) \Rightarrow Z(\mathrm{s}(y))) \Rightarrow Z(0) \Rightarrow Z(x)].$$

- Esta fórmula dice que los naturales son la intersección de todos los conjuntos inductivos.
- Anotamos como $\mathbb{N}$ al objeto de segunda clase asociado a la fórmula Nat por el esquema de comprensión II.

Hasta acá describimos la lógica de (PA2), es decir, algo de lo que la lógica clásica de segundo orden (LK2) permite expresar y demostrar. Pero la aritmética tiene axiomas:

Axiomas de Peano:

$\forall xy.[\mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \Rightarrow x = y]$	El sucesor es inyectivo.
$\forall x.\, \mathsf{s}(x) \neq 0$	0 no es sucesor de ningún elemento.
$\forall x.x \in \mathbb{N}$	Principio de inducción.

Observación: El principio de inducción equivale a:

$$\forall Z \left[\forall y.(Z(y) \Rightarrow Z(\mathsf{s}(y))) \Rightarrow Z(0) \Rightarrow \forall x.Z(x)\right]$$

que equivale a

$$\forall Z \forall x \left[\forall y.(Z(y) \Rightarrow Z(\mathsf{s}(y))) \Rightarrow Z(0) \Rightarrow Z(x)\right]$$

que dice que cualquier predicado inductivo tiene a todos los objetos de primera clase.

- Los procesos tienen diferentes interpretaciones:

Énfasis en...	Términos	Pilas
la lógica	evidencia	refutación
la programación	programa	entorno
la teoría de juegos	defensor	oponente

- Un proceso es la oposición entre una evidencia y una refutación, entre un programa y su entorno de ejecución y entre un defensor y un oponente en un juego.
- Esta oposición está arbitrada por un conjunto de procesos $\perp\!\!\!\perp$ llamado *polo*, que para garantizar adecuación, se toma *saturado* (i.e.: cerrado por antievaluación): $p \succ q \in \perp\!\!\!\perp \Longrightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$.
- Cada conjunto $X \subseteq \Lambda \star \Pi$ induce un polo $\perp\!\!\!\perp_X := \bigcap\{Y \subseteq \Lambda \star \Pi \mid X \subseteq Y \text{ e } Y \text{ saturado}\}$.

- Fijado un polo $\perp\!\!\!\perp$, este define una *conexión de Galois* entre $\mathcal{P}(\Lambda)$ y $\mathcal{P}(\Pi)$:
  - Dado $P \subseteq \Pi$, definimos $P^{\perp\!\!\!\perp} := \{t \in \Lambda \| \; \forall \pi \in P \quad t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$.
  - Dado $L \subseteq \Lambda$, definimos $L^{\perp\!\!\!\perp} := \{\pi \in \Lambda \mid \forall t \in L \quad t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$.
- Que sea una *conexión de Galois* significa que:
  - Ambas funciones $()^{\perp\!\!\!\perp}$ son contravariantes (resp. al orden $\subseteq$).
  - Para todo $L \subseteq \Lambda$ y $P \subseteq \Pi$ tenemos $L \subseteq L^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp}$ y $P \subseteq P^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp}$. Cuando se da la igualdad, decimos que es una *correspondencia de Galois*.
- Por ser una conexión de Galois vale que $L^{\perp\!\!\!\perp} = L^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp}$ y $P^{\perp\!\!\!\perp} = P^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp}$.
- Toda conexión de Galois induce una correspondencia de Galois en las imágenes de los mapas. Entonces los ortogonales son una correspondencia de Galois entre $\mathcal{P}_{\perp\!\!\!\perp}(\Lambda) := \{P^{\perp\!\!\!\perp} \mid P \subseteq \Pi\}$ y $\mathcal{P}_{\perp\!\!\!\perp}(\Pi) := \{L^{\perp\!\!\!\perp} \mid L \subseteq \Lambda\}$.
- $\mathcal{P}_{\perp\!\!\!\perp}(\Lambda)$ y $\mathcal{P}_{\perp\!\!\!\perp}(\Pi)$ son respectivamente las partes de Λ y de Π que son cerradas bajo doble ortogonal.

- La realizabilidad se define para cada fórmula cerrada paramétrica A. Hay **dos** interpretaciones por cada fórmula:
  - $\|A\| \subseteq \Pi$. Es un conjunto de pilas/refutaciones/entornos.
  - $|A| \subseteq \Lambda$. Es un conjunto de términos *proof-like*/pruebas/programas.
  - Están relacionados por la polaridad $|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp}$
- Las definiciones de las interpretaciones $|A|$ y $\|A\|$ son mutuamente recursivas.

Definición de la interpretación:

- $\|F(e_1, \ldots, e_k)\| := F(e_1^{\mathbb{N}}, \ldots, e_k^{\mathbb{N}})$.
- $\|A \Rightarrow B\| := |A| \cdot \|B\|$.
- $\|\forall x.A\| := \bigcup\{\|A\{x := n\}\| \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- $\|\forall X.A\| := \bigcup\{\|A\{X := E\}\| \mid E$ es un parámetro de aridad $k\}$ (X tiene aridad k)

Pensando $\|A\|$ como un conjunto de refutaciones de A y $|A|$ como un conjunto de pruebas de A tenemos:

- Una refutación de $A \Rightarrow B$ es una prueba de A y una refutación de B.
- Una refutación de $\forall x.A$ es una refutación para alguna instancia $A\{x := n\}$ de $A(x)$.
- Una refutación de $\forall X.A$ es una refutación para alguna instancia $A\{X := E\}$ de $A(X)$.

Definición de la Realizabilidad:

- Decimos que un λ_c-término t *realiza* A si $t \in |A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp}$. Notación: $t \Vdash A$.
- Un término $t \in \Lambda$ es un *realizador universal* de A (notación: $t \Vvdash A$) si y sólo si $t \Vdash A$ para todo polo $\perp\!\!\!\perp$.

Ejemplos:

- $\lambda x.x \Vvdash \forall X.X \Rightarrow X$.
- $\mathfrak{C} \Vvdash \forall X.\forall Y.((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X) \Rightarrow X$.

Ejercicio.

- El sistema de deducción (NK2) es un sistema de tipos para el λ_c-cálculo básico (es decir: con aplicación, abstracción y `call/cc`).
- El sistema (KN2) lo *decoramos* con λ_c términos: $A_1, \ldots, A_k \vdash B$ se transforma en $\underbrace{x_1{:}A_1, \ldots, x_k{:}A_k}_{\text{premisas}} \vdash \underbrace{t{:}B}_{\text{concl.}}$

$$\frac{}{A_1, \ldots, A_k \vdash A_i} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x.A}\, x \notin F(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{x := e\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall X.A}\, X \notin F(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{X := E\}}$$

- El sistema de deducción (NK2) es un sistema de tipos para el λ_c-cálculo básico (es decir: con aplicación, abstracción y `call/cc`).
- El sistema (KN2) lo *decoramos* con λ_c términos: $A_1, \ldots, A_k \vdash B$ se transforma en $\underbrace{x_1{:}A_1, \ldots, x_k{:}A_k}_{\text{premisas}} \vdash \underbrace{t{:}B}_{\text{concl.}}$

$$\frac{}{x_1{:}A_1, \ldots, x_k{:}A_k \vdash x_i{:}A_i} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbb{C}{:}((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}$$

$$\frac{\Gamma, x{:}A \vdash t{:}B}{\Gamma \vdash \lambda x.t{:}A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash t{:}A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash u{:}A}{\Gamma \vdash tu{:}B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t{:}A}{\Gamma \vdash t{:}\forall x.A}\, x \notin F(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash t{:}\forall x.A}{\Gamma \vdash t{:}A\{x := e\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t{:}A}{\Gamma \vdash t{:}\forall X.A}\, X \notin F(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash t{:}\forall x.A}{\Gamma \vdash t{:}A\{X := E\}}$$

- En el sistema de tipos establecemos una correspondencia pruebas-programas: Toda demostración de A en (NK2) construye un término de tipo A y todo término de tipo A tiene asociada al menos una prueba de A.
- Esa correspondencia se establece regla a regla. Cada regla corresponde a una etapa en la construcción del término asociado a la prueba:
  - Introducir la *Ley de Peirce* en la prueba corresponde a introducir un $\mathbb{C}$ en el término de prueba.
  - Introducir una implicación corresponde a abstraer una variable.
  - Eliminar una implicación corresponde a aplicar un término.
  - Los cuantificadores universales no aportan a la construcción del término.
- Es inmediato que si probamos $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash t : B$ entonces $FV(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ (**ejercicio**).

- En el sistema de tipos tenemos secuentes de la forma $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash t : B$.
- Estos secuentes a priori tienen variables a interpretar: variables de λ_c-términos y variables de primero y de segundo orden de (PA2).
- Una *clausura* de una fórmula de (PA2) (posiblemente abierta) consiste en substituir las variables por parámetros en el universo de interpretación que corresponda:
  - Variables x de primer orden por parámetros $n \in \mathbb{N}$.
  - Variables X de segundo orden con aridad k por parámetros $F : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi)$.

Fijado un polo $\perp\!\!\!\perp$, decimos que el secuente $x_1{:}A_1, \ldots, x_k{:}A_k \vdash t{:}B$ es verdadero resp. de $\perp\!\!\!\perp$ sii: para toda clausura de $A_1, \ldots, A_k, B$

$$\forall u_1, \ldots, u_k \quad \left[\bigwedge \Big(u_i \in |A_i| \Big)_{i=1}^{k} \Longrightarrow t\Big\{ x_i := u_i \Big\}_{i=1}^{k} \in |B| \right]$$

La adecuación del sistema de tipos establece que para todos los polos, a partir de *premisas verdaderas* las reglas infieren *conclusiones verdaderas*.

Lema de Adecuación:

Todas las reglas del sistema de tipos son correctas.

Demostración:

En las reglas de $\mathbb{C}$, abstracción y aplicación se usa que los polos son saturados y las reglas de reducción:

1. Para $\mathbb{C}$ consiste en probar que $\mathbb{C} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (ya lo probamos usando las reglas $(\textsc{Save})$ y $(\textsc{Restore})$).
2. Para la abstracción: es consecuencia de la regla $(\textsc{Pop})$.
3. Para la aplicación: es consecuencia de la regla $(\textsc{Push})$.

Para la regla de axioma es evidente. Para las reglas de introducción y eliminación de $\forall$ se razona sobre la definición misma de la semántica. **Ejercicio**.

- Tal como en la Realizabilidad Intuicionista, la **Realizabilidad Clásica** se puede entender como una **transformación de modelos**.
- Fijamos $\mathcal{N}$ un *modelo de partida* de la aritmética de segundo orden. Usualmente Krivine elige el *modelo estándar* **pleno**:
  - Los objetos de primera clase son los *naturales estándar*[1] $\mathbb{N}$.
  - La interpretación de $0, \mathsf{s}, +, \times, \ldots$ son las usuales.
  - Los objetos de segunda clase son **todas** las partes de $\mathbb{N}$.
- Fijamos un modelo $\mathcal{K} := (\Lambda, \Pi, \succ)$ de la (KAM) (lo que implica fijar las constantes y la reducción)

[1] Ser el modelo estándar de la aritmética significa, por ejemplo, ser el ordinal ω de algún modelo de la teoría de conjuntos que fijamos al comienzo.

- Con estos ingredientes tenemos una **teoría** (por el **lema de adecuación**)

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K},\perp\!\!\!\perp} := \{A \mid A \text{ fórmula paramétrica cerrada y tal que } t \Vdash A \text{ para algún proof-like } t\}$$

.

- En general la teoría $\mathcal{N}_{\mathcal{K},\perp\!\!\!\perp}$ no tiene porqué ser consistente e.g.: consideremos $X := \{Id \star \pi \mid \pi \in \Pi\}$. Entonces $Id \Vdash \perp$ y $\perp \in \mathcal{N}_{\mathcal{K},\perp\!\!\!\perp_X}$.
- Coloquialmente a $\mathcal{N}_{\mathcal{K},\perp\!\!\!\perp}$ le diremos **modelo**, aunque no sea consistente.
- $\mathcal{N}_{\mathcal{K},\perp\!\!\!\perp}$ es consistente $\iff \forall t \in PI \quad \exists \pi_t \in \Pi \quad t \star \pi_t \notin \perp\!\!\!\perp$.
- Si $\mathcal{N}_{\mathcal{K},\perp\!\!\!\perp}$ es consistente, entonces existe al menos un modelo de Tarski $\mathcal{M}_{\mathcal{K},\perp\!\!\!\perp} \models \mathcal{N}_{\mathcal{K},\perp\!\!\!\perp}$ (i.e.: todo lo que es realizable por un proof-like es verdadero en $\mathcal{M}_{\mathcal{K},\perp\!\!\!\perp}$).

Pregunta:

¿Podemos caracterizar a los **realizadores universales** *de una fórmula A en función de su* **comportamiento computacional***?*

Cuando esto es posible, obtenemos una **especificación** para A.

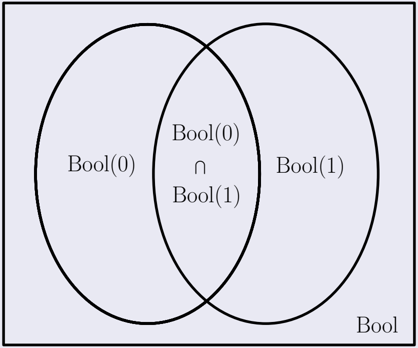
Ejemplo: $A = \forall X.X \Rightarrow X$

Probamos que $t \Vdash \forall X.X \Rightarrow X$ si y sólo si
$\forall \ell \in \Lambda \quad \forall \pi \in \Pi \quad t \star \ell \cdot \pi \succ \ell \star \pi.$

Ejemplo: Los booleanos

Consideramos las siguientes fórmulas para los booleanos:

- $\texttt{Bool(n)} = \forall X.X(0) \Rightarrow X(1) \Rightarrow X(n)$.
  Entonces $\texttt{Bool}(0)$ y $\texttt{Bool}(1)$ son los booleanos de (AF2).
- $\texttt{Bool} = \forall X.X \Rightarrow X \Rightarrow X$ son los booleanos del sistema (F).



Propiedades:

1. $t \Vdash \texttt{Bool(0)}$ ssi $\forall \ell, m \in \Lambda \quad \forall \pi \in \Pi \quad t \star \ell \cdot m \cdot \pi \succ \ell \star \pi$.
2. $t \Vdash \texttt{Bool(1)}$ ssi $\forall \ell, m \in \Lambda \quad \forall \pi \in \Pi \quad t \star \ell \cdot m \cdot \pi \succ m \star \pi$.
3. No hay realizadores universales de $\texttt{Bool}(n)$ si $n \neq 0, 1$.
4. $t \Vdash \texttt{Bool}$ ssi $\forall \ell, m \in \Lambda \quad \forall \pi \in \Pi \quad t \star \ell \cdot m \cdot \pi \succ \begin{cases} \ell \star \pi \\ \bigvee \\ m \star \pi \end{cases}$.
5. $\pitchfork \Vdash$ Bool(0) $\cap$ Bool(1) (booleano de elección no determinista).
6. $B := \lambda lm.\,\mathrm{quote}\,(\,\lambda n.\,\mathrm{even}\; n\;\; l\;\; m) \Vdash$ Bool pero $B \not\Vdash$ Bool(n) con $n = 0, 1$.

Ejemplo: Peirce:=$\forall X.\forall Y.((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X) \Rightarrow X$

.

- Vimos que $\mathfrak{C} \Vdash$ Peirce. ¿Cuál es la especificación de Peirce?

¿Hay algo más que `call/cc`?

Reglas que caracterizan el comportamiento de `call/cc`:

$$
\begin{array}{lllllll}
(\text{SAVE}) & \mathfrak{C} & \star & t \cdot \pi & \succ & t & \star & k_\pi \cdot \pi \\
(\text{RESTORE}) & k_\pi & \star & u \cdot \rho & \succ & u & \star & \pi
\end{array}
$$

Sea $C_{2,i}$ un término que satisface:

$$
\begin{array}{lllllll}
(\text{SAVE1}) & C_{2,i} & \star & t \cdot \pi & \succ & t & \star & C_1 \cdot \pi \\
(\text{SAVE2}) & C_1 & \star & u_1 \cdot \rho_1 & \succ & t & \star & C_2 \cdot \pi \\
(\text{RESTORE})(2,i) & C_2 & \star & u_2 \cdot \rho_2 & \succ & u_i & \star & \pi
\end{array}
$$

Con $i = 1, 2$. Por ejemplo: $\mathtt{C}_{2,2} := \lambda t.\, \mathfrak{C}\, \lambda k.t \lambda u_2.k(t(\lambda u_1.ku_1))$.

Generalización:

Sea $\mathtt{C}_{ki}$ itera la interacción k veces y pone u_i en posición activa al tiempo que restaura la pila π. Entonces C $\Vdash$ Peirce. **Ejercicio.**

Este comportamiento se formaliza como un **Juego $\mathbf{G}_0$** entre:

- Un *defensor* de Peirce: $\exists$.
- Un *atacante* de Peirce: $\forall$.

$\exists$	$\forall$	Posición de interacción	
C	$t \cdot \pi$	$t \star C_1 \cdot \pi$	en Th_0
C_1	$u_1 \cdot \rho_1$	$t \star C_2 \cdot \pi$	en Th_1
C_2	$u_2 \cdot \rho_2$	$t \star C_3 \cdot \pi$	en Th_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
C_n	$u_n \cdot \rho_n$	$u_i \star \pi$	en Th_n

Las posiciones de interacción son aquellas de la forma $t \star c \cdot \pi$, es decir:

- t en posición activa.
- una pila de la forma $c \cdot \pi$ para algún término c.

Es $\forall$ quien fija cómo son los procesos que habilitan la comunicación.

Protocolo del juego...

- ∃ propone el *defensor* C de la fórmula Peirce $\equiv ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X) \Rightarrow X$.
- ∀ lo *ataca* proporcionando un entorno de ejecución $t \cdot \pi$.

Intuición:

∀ pretende que t prueba $(\{\pi\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \{\pi\}$ y π refuta $\{\pi\}$, todo lo cual negaría la fórmula de Peirce.

- La partida continúa reduciendo el proceso $\mathrm{C} \star t \cdot \pi$ hasta que ∃ decide deternerla **en alguna posición de interacción** $t \star \mathrm{C}_1 \cdot \pi$ (puede no ser única). Define C_1 como ∃-jugada.

Intuición:

∃ pretende que C_1 prueba $\{\pi\} \Rightarrow \bot$ y π refuta $\{\pi\}$ (y entonces t no probaría lo que ∀ dice).

...Protocolo del juego

- Luego ∀ responde a C_1 con una nueva pila de la forma $u_1 \star \rho_1$.

Intuición:

∃ pretende que u_1 prueba $\{\pi\}$ y que ρ_1 refuta $\perp$ (y entonces C_1 no probaría lo que ∃ dice).

- La partida continúa reduciendo el proceso $C_1 \star u_1 \cdot \rho_1$ hasta tanto se llegue a otra posición de interacción, etc.
- La partida termina si en algún momento aparece en ejecución $u_i \star \pi$ para algún u_i ya jugado por ∀. El defensor ∃ gana porque confrontó a una supuesta prueba u_i de $\{\pi\}$ jugada por ∀ con una refutación π de $\{\pi\}$.
- Si la partida no termina, entonces ∀ gana la partida porque logra siempre refutar a ∃ sin entrar en contradicción.

Razonamos por substitución de constantes:

- Fijemos la reducción de la (KAM) como la clausura transitiva de las reglas $(\textsc{Push})$, $(\textsc{Pop})$, $(\textsc{Save})$, $(\textsc{Restore})$.
- Sean $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ constantes de parada: $K_i \star \pi \not\succ$ para todo π y sean $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ constantes de pila. Consideremos a λ_c extendido con las constantes (K_i) y (α_j). Cada término $t = t(K_i, \alpha_j)_{i,j}$ depende de una cantidad finita de K_i's y α_j's. Lo mismo sucede con las pilas.
- Usaremos la substitución simultánea de constantes K_i por términos y constantes α_j por pilas: $\varphi := \{K_i := u_i\}_{i\in I} \cup \{\alpha_j := \rho_j\}_{j\in J}$. Se define en las continuaciones como $(k_\pi)[\varphi] := k_{\pi[\varphi]}$ y en el resto de los términos y pilas siguiendo la sintaxis: $tu[\varphi] := t[\varphi]u[\varphi]$, $(\lambda x.t)[\varphi] := \lambda x.t[\varphi]$, $(t \cdot \pi)[\varphi] := t[\varphi] \cdot \pi[\varphi]$.

- Las 4 reglas básicas de reducción son compatibles con la substitución de constantes:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
tu \star \pi & \succ_1 & t \star u \cdot \pi & \Longrightarrow & (tu)[\varphi] \star \pi[\varphi] & \succ_1 & t[\varphi] \star (u \cdot \pi)[\varphi] \\
\lambda x.t \star u \cdot \pi & \succ_1 & t\{x := u\} \star \pi & \Longrightarrow & (\lambda x.t)[\varphi] \star (u \cdot \pi)[\varphi] & \succ_1 & t[\varphi]\{x := u[\varphi]\} \star \pi[\varphi] \\
\mathfrak{C} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star k_\pi \cdot \pi & \Longrightarrow & \mathfrak{C} \star (t \cdot \pi)[\varphi] & \succ_1 & t[\varphi] \star k_{\pi[\varphi]} \cdot \pi[\varphi] \\
k_\pi \star u \cdot \rho & \succ_1 & u \star \pi & \Longrightarrow & k_{\pi[\varphi]} \star u[\varphi] \cdot \rho[\varphi] & \succ_1 & u[\varphi] \star \pi[\varphi]
\end{array}
$$

- Plan de trabajo: 1. Estudiar los hilos de ejecución de los realizadores computando en un contexto de constantes inertes. 2. Razonar por substitución para comprender el comportamiento general de los realizadores.
- Sea $\mathrm{C} \Vdash$ Peirce. Consideremos $\mathrm{Th}_0 := \mathrm{Th}(\mathrm{C} \star K_0 \cdot \alpha_0)$ y $\perp\!\!\!\perp_0 := (\mathrm{Th}_0)^c$
- Entonces $\mathrm{C} \Vdash_0 ((\{\alpha_0\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \{\alpha_0\}) \Rightarrow \{\alpha_0\}$ pero

$\mathrm{C} \star K_0 \cdot \alpha_0 \notin \perp\!\!\!\perp_0$.  ¿Qué significa esto?

- Significa que $K_0 \not\Vdash_0 (\{\alpha_0\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \{\alpha_0\}$, es decir que $K_0 \star c_1 \cdot \alpha_0 \notin \perp\!\!\!\perp_0$ para algún $c_1 \Vdash_0 \{\alpha_0\} \Rightarrow \bot$.
- Que $K_0 \star c_1 \cdot \alpha_0 \notin \perp\!\!\!\perp_0$ significa que aparece en $\mathrm{Th}(\mathsf{C} \star K_0 \cdot \alpha_0)$, es decir que:

  $$\mathrm{Th}_0 : \quad \mathsf{C} \star K_0 \cdot \alpha_0 \succ K_0 \star c_1 \cdot \alpha_0 \notin \perp\!\!\!\perp_0$$

  Y estos procesos son respectivamente comienzo y final del hilo (que es entonces finito), ya que la constante K_0 es inerte.
- C computó entonces un término c_1 (e.g.: si $\mathsf{C} = \mathfrak{C}$ entonces $c_1 = k_{\alpha_0}$). Para describir el comportamiento de c_1 consideramos $\mathrm{Th}_1 := \mathrm{Th}(c_1 \star K_1 \cdot \alpha_1)$, $\perp\!\!\!\perp_1 := (\mathrm{Th}_0 \cup \mathrm{Th}_1)^c$ y repetimos el razonamiento:

- Significa que $K_0 \not\Vdash_0 (\{\alpha_0\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \{\alpha_0\}$, es decir que $K_0 \star c_1 \cdot \alpha_0 \notin \perp\!\!\!\perp_0$ para algún $c_1 \Vdash_0 \{\alpha_0\} \Rightarrow \bot$.
- Que $K_0 \star c_1 \cdot \alpha_0 \notin \perp\!\!\!\perp_0$ significa que aparece en $\mathrm{Th}(\mathsf{C} \star K_0 \cdot \alpha_0)$, es decir que:

$$\mathrm{Th}_0 : \quad \mathsf{C} \star K_0 \cdot \alpha_0 \succ K_0 \star c_1 \cdot \alpha_0 \notin \perp\!\!\!\perp_0$$

  Y estos procesos son respectivamente comienzo y final del hilo (que es entonces finito), ya que la constante K_0 es inerte.
- C computó entonces un término c_1 (e.g.: si $\mathsf{C} = \mathbb{C}$ entonces $c_1 = k_{\alpha_0}$). Para describir el comportamiento de c_1 consideramos $\mathrm{Th}_1 := \mathrm{Th}(c_1 \star K_1 \cdot \alpha_1)$, $\perp\!\!\!\perp_1 := (\mathrm{Th}_0 \cup \mathrm{Th}_1)^c$ y repetimos el razonamiento:

- Razonamos en $\perp\!\!\!\perp_1$ y concluimos que existe algún $c_2 \Vdash_1 (\{\alpha_0\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \{\alpha_0\}$ tal que $K_0 \star c_2 \cdot \alpha_0$ pertenece a Th_0 o a Th_1:
  - Si $K_0 \star c_2 \cdot \alpha_0 \in \mathrm{Th}_0$, entonces $c_2 = c_1$ y tenemos que $c_1 \Vdash_1 \{\alpha_0\} \Rightarrow \bot$. Pero como $c_1 \star K_1 \cdot \alpha_1 \notin \perp\!\!\!\perp_1$, entonces $K_1 \not\Vdash_1 \{\alpha_0\}$ y de acá concluimos que $K_1 \star \alpha_1$ aparece en uno de los dos hilos. Como las K_i son inertes, debe aparecer en el segundo hilo y ahí terminamos el análisis con constantes:
  $$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{C}_0 & \star & K_0 \cdot \alpha_0 & \succ & K_0 & \star & c_1 \cdot \alpha_0 \\ c_1 & \star & K_1 \cdot \alpha_1 & \succ & K_1 & \star & \alpha_0 \end{array}$$
  Pregunta:
  ¿Qué realizador conocido tiene este comportamiento?
  - Si $K_0 \star c_2 \cdot \alpha_0 \in \mathrm{Th}_1$, entonces consideramos el hilo $\mathrm{Th}_2 := \mathrm{Th}(c_2 \star K_2 \cdot \alpha_2)$ y $\perp\!\!\!\perp_2 := \left(\bigcup_{i=0}^{2} \mathrm{Th}_i\right)^c = \bigcap_{i=0}^{2} \mathrm{Th}_i^c$.
  Volvemos a obtener que en alguno de los 3 hilos aparece $K_0 \star c_3 \cdot \alpha_0$ para algún $c_3 \Vdash_3 \{\alpha_0\} \Rightarrow \bot$.

- Si aparece en Th_0 o Th_1, tenemos que $c_3 = c_i$ con $i = 1$ o 2 y terminamos el análisis con constantes:

$$\begin{array}{ccccccccc} C_0 & \star & K_0 \cdot \alpha_0 & \succ & K_0 & \star & c_1 \cdot \alpha_0 \\ c_1 & \star & K_1 \cdot \alpha_1 & \succ & K_0 & \star & c_2 \cdot \alpha_0 \\ c_2 & \star & K_2 \cdot \alpha_2 & \succ & K_i & \star & \alpha_0 \end{array}$$

- Si aparece en Th_3, entonces definimos $\mathrm{Th}_4 := \mathrm{Th}(c_3 \star K_3 \cdot \alpha_3)$ y así sucesivamente.

Pregunta:

¿Puede ser infinito este proceso?

Supongamos que tenemos una tabla infinita de hilos:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \star & K_0 \cdot \alpha_0 & \succ & K_0 & \star & c_1 \cdot \alpha_0 \\ c_1 & \star & K_1 \cdot \alpha_1 & \succ & K_0 & \star & c_2 \cdot \alpha_0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ c_i & \star & K_i \cdot \alpha_i & \succ & K_0 & \star & c_i \cdot \alpha_0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

- Substituimos en los infinitos hilos K_0 por $\lambda c.cH$ (donde H es otra constante inerte) y las α_i por α_0.
- Esta substitución encadena los infinitos hilos finitos en un solo hilo infinito. Entonces H jamás puede quedar en posición activa en ese hilo.
- **Ejercicio:** Razonando en el hilo de $\mathsf{C} \star \lambda c.cH \cdot \alpha_0$ probar que $H \star \alpha_0$ debe aparecer en el hilo (lo cual es absurdo y prueba que no pueden haber infinitos hilos).

Resumen:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathsf{C}_0 & \star & K_0 \cdot \alpha_0 & \succ & K_0 & \star & c_1 \cdot \alpha_0 \\ c_1 & \star & K_1 \cdot \alpha_1 & \succ & K_0 & \star & c_2 \cdot \alpha_0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ c_k & \star & K_k \cdot \alpha_k & \succ & K_i & \star & \alpha_0 \end{array}$$

para algún k y algún $i \leq k$.

Si ahora razonamos por substitución, tenemos que todo realizador de Peirce implementa una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{G}_0$, que recordamos:

- Un jugador *defensor* de Peirce: $\exists$.
- Un jugador *atacante* de Peirce: $\forall$.

$\exists$	$\forall$	Posición de interacción	
C	$t \cdot \pi$	$t \star C_1 \cdot \pi$	en Th_0
C_1	$u_1 \cdot \rho_1$	$t \star C_2 \cdot \pi$	en Th_1
C_2	$u_2 \cdot \rho_2$	$t \star C_3 \cdot \pi$	en Th_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
C_n	$u_n \cdot \rho_n$	$u_i \star \pi$	en Th_n

La partida termina si en algún momento aparece en ejecución $u_i \star \pi$ para algún u_i ya jugado por $\forall$. En ese caso, el defensor $\exists$ gana la partida
Si la partida no termina, entonces $\forall$ gana la partida.

- Para probar este resultado usamos que:
  1. La reducción es determinista.
  2. La reducción es compatible con la substitución de constantes.
  3. Las constantes K_i son inertes, esto es, $K_i \star \rho$ no reduce.
  4. Ningún paso de reducción produce constantes K_i ni α_j.

Importante:

4\. permite afirmar que K_i sólo aparece a partir del hilo i-ésimo.

Observación:

La condición determinista en la reducción es innecesaria:

- En el paso n, $K_0 \star c_n \cdot \alpha_0$ podría aparecer en alguno de los hilos anteriores sin que $c_n = c_i$ para alguno de los anteriores c_i. En ese caso se continúa la partida con la interacción entre $\exists$ y $\forall$ y se abre un nuevo hilo $c_n \star k_n \cdot \alpha_n$.
- El argumento de terminación substituyendo K_0 por $\lambda c.cH$ de todas formas funciona, de modo que una de las K_i que se juegan durante la partida debe llegar en posición activa en algún momento de la ejecución.

- A las constantes K_i que satisfacen 2, 3 y 4 se les llama *constantes de interacción*

Teorema:

Si el lenguaje de realizadores satisface:

- Tiene infinitas constantes de interacción $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$
- Tiene infinitas constantes de pilas $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *substitutivas* y *no generativas*

Entonces los realizadores de Peirce son los términos que implementan estrategias ganadoras **uniformes** para el juego $\mathbf{G}_0$.

La *uniformidad* refiere a que la cantidad n de interacciones y el índice i de la posición final $u_i \star \pi$ en el juego *son las mismas* para todas las partidas posibles de ese realizador.
Se comportan como los $\mathrm{C}_{n,i}$ que definimos al principio.

¿Qué sucede si levantamos las restricciones en los realizadores?

Con instrucciones como `quote` o `eq` es posible implementar estrategias **no uniformes** para el juego o incluso términos que no son estrategias para este juego:

Realizadores que no tienen el comportamiento anterior:

- Con `quote`: Un realizador que en función de la pila π (i.e.: del entero $\overline{n}_\pi$) define su comportamiento como alguno de los $C_{n,i}$.
- Con `eq`: Un realizador que define su comportamiento comparando términos que aparecen en la ejecución.

Veamos un ejemplo:

$$C \star u_0 \cdot \pi_0 \quad \succ \quad v \star \pi_0 \quad \succ \quad u_0 \star K_1 \cdot \pi_0$$

$$K_1 \star u_1 \cdot \rho_1 \quad \succ \quad \ldots \quad \succ \quad \begin{cases} \texttt{any\_term} \star \pi & \text{If} \quad u_1 = v \\ u_1 \star \pi_0 & \text{Sinó.} \end{cases}$$

Este término se puede definir mediante eq, que a su vez se puede definir mediante `quote`.

Observación:

`quote` juega un rol muy importante en la Realizabilidad Clásica: permite realizar el axioma de elección dependiente y el axioma de elección numerable.

Este comportamiento se formaliza como un **Juego $\mathbf{G}_1$** entre:

- Un *defensor* de Peirce: $\exists$.
- Un *atacante* de Peirce: $\forall$.

$\exists$	$\forall$	Posición de interacción	
$\mathtt{c}$	$t \cdot \pi$	$t \star \mathrm{C}_1 \cdot \pi$	en Th_0
C_1	$u_1 \cdot \rho_1$	$t \star \mathrm{C}_2 \cdot \pi$	en $\mathrm{Th}_0 \cup \mathrm{Th}_1$
C_2	$u_2 \cdot \rho_2$	$t \star \mathrm{C}_3 \cdot \pi$	en $\bigcup_{i=0}^{3} \mathrm{Th}_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
C_n	$u_n \cdot \rho_n$	$u_i \star \pi$	en $\bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{Th}_i$

La partida termina si en algún momento aparece en ejecución $u_i \star \pi$ para algún u_i ya jugado por $\forall$. En ese caso, el defensor $\exists$ gana la partida
Si la partida no termina, entonces $\forall$ gana la partida.

Teorema:

Un término cerrado es un realizador universal de la ley de Peirce si y sólo si es una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{G}_1$.

Specifying Peirce's Law in Classical Realizability. M. Guillermo & A. Miquel. Mathematical Structures in Computer Science, 26(7):12691303, October 2016.

- Siguiendo técnicas similares es posible especificar el comportamiento de los realizadores de las fórmulas de la aritmética, i.e.: $F := \xi_1 \vec{x_1} \ldots \xi_k \vec{x_k} A$ donde $\xi_1, \ldots, \xi_k$ es una secuencia alternada de (bloques de) cuantificadores (i.e.: $\exists, \forall, \exists, \forall, \ldots$ o $\forall, \exists, \forall, \exists, \ldots$) y A es una ecuación.
- La especificación de estas fórmulas es un juego con backtracking, tal como en Peirce.

- Si se relativizan los cuantificadores a Nat, estos juegos consisten en que $\forall$ juegue enteros cuantificados universalmente y $\exists$ juegue enteros cuantificados existencialmente.
- Para especificar estas fórmulas es necesario usar los *operadores de acumulación* que simulan la estrategia *call-by-value* en la (KAM). Los veremos en breve...
- También es posible probar la especificación para el caso en el que la (KAM) admite constantes de interacción y luego generalizar la especificación relajando las reglas del juego para $\exists$.
- Estos resultados están publicados en *Classical realizability and arithmetical formulæ* M. Guillermo & Étienne Miquey. Mathematical Structures in Computer Science , Volume 27 , Issue 6 , September 2017 , pp. 1068 - 1107.

- Sean e_1, e_2 términos y $e_1^{\mathbb{N}}$, $e_2^{\mathbb{N}}$ sus interpretaciones en el modelo de partida. Entonces: $\|e_1 = e_2\| =$
$$\begin{cases} \|\top \to \bot\| = \{t \cdot \pi \mid t \in \Lambda, \pi \in \Pi\} & \text{Si } e_1^{\mathbb{N}} \neq e_2^{\mathbb{N}} \\ \|\forall X(X \Rightarrow X)\| = \{t \cdot \pi \mid t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\} & \text{Si } e_1^{\mathbb{N}} = e_2^{\mathbb{N}} \end{cases}$$
- Definimos el parámetro auxiliar $\neq$ mediante
$$\|m \neq n\| := \begin{cases} \|\top\| = \emptyset & \text{Si } m \neq n \\ \|\bot\| = \Pi & \text{Si } m = n \end{cases}$$
- **Ejercicio:**
$\lambda x.x\,\mathrm{id} \Vdash \forall x \forall y[(x = y \Rightarrow \bot) \Rightarrow n \neq y]$
$\lambda xy.yx \Vdash [x \neq y \Rightarrow x = y \Rightarrow \bot]$.
- Entonces realizar una fórmula que contiene igualdades o sus negaciones es equivalente a realizar otra fórmula que se expresa mediante el parámetro $\neq$:
$$\begin{array}{rcl} e_1 = e_2 & \text{se reemplaza por} & e_1 \neq e_2 \Rightarrow \bot \\ e_1 = e_2 \Rightarrow \bot & \text{se reemplaza por} & e_1 \neq e_2 \end{array}$$

- $\mathrm{id} \Vdash \forall x \forall y[\mathrm{s}\, x = \mathrm{s}\, y \Rightarrow x = y]$ (**ejercicio**).
- $\lambda x.x\, \mathrm{id} \Vdash \forall x[\mathrm{s}\, x = 0 \Rightarrow \perp]$ (**ejercicio**).
- En muchos modelos interesantes el principio de inducción es falso: no hay siquiera un realizador de $t \Vdash \mathrm{Nat}(0) \cap \mathrm{Nat}(1)$.

La solución pasa por:

1. Definir recursivamente la relativización de los cuantificadores a Nat: $(\exists x.A)^{\mathrm{Nat}} := \exists x(\mathrm{Nat}(x) \wedge A^{\mathrm{Nat}})$ y $(\forall x.A)^{\mathrm{Nat}} := \forall x(\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A^{\mathrm{Nat}})$.
2. Probar que para toda función primitivo recursiva f, en $(\mathrm{PA2})^-$ (aritmética clásica de segundo orden sin el ppio. de inducción) vale que $\forall \vec{x}[(\mathrm{Nat}(x_i))_{i=1}^{k} \Rightarrow \mathrm{Nat}(f(\vec{x}))]$.
3. Concluir que si $PA2 \vdash A$ entonces $PA2^- \vdash A^{\mathrm{Nat}}$.

- Las fórmulas de Horn son clausuras universales de fórmulas de la forma: $E_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow E_k \Rightarrow F$, donde F es una igualdad o una desigualdad y $E_1, \ldots, E_k$ son ecuaciones ($k \geq 0$).
- Las fórmulas de Horn permiten expresar numerosas definiciones matemáticas: **Ejemplo:** Definimos el predicado $\leq := \lambda xy.(x \dot{-} y = 0)$ ($\dot{-}$ es la *resta truncada*).

Mediante fórmulas de Horn podemos expresar que $\leq$ es un **orden** cuyo **mínimo es** 0 y **no acotado superiormente**:

- $\forall x(x \leq x)$.
- $\forall xyz[x \leq y \Rightarrow y \leq z \Rightarrow x \leq z]$.
- $\forall xy[x \leq y \Rightarrow y \leq x \Rightarrow x = y]$.
- $\forall x[0 \leq x]$.
- $\forall x[x \leq \mathrm{s}\, x]$.
- $\forall x[x \neq \mathrm{s}\, x]$.

Teorema: Las fórmulas de Horn son preservadas por la realizabilidad

Sea H una fórmula de Horn verdadera en el modelo de partida. Entonces existe un realizador uniforme $t_H \Vdash H$ (y entonces H es verdadera en todos los modelos de Realizabilidad).

Idea de la prueba

Observaciones: Para todas A y B

1. $|\top \Rightarrow \bot| \subseteq |A \Rightarrow B|$.
2. $|(\top \Rightarrow \bot) \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot)| \subseteq |(\top \Rightarrow \bot) \Rightarrow (A \Rightarrow B)|$.

Sea $H := E_1 \Rightarrow E_2 \Rightarrow F$ una fórmula de Horn y supongamos que F es una ecuación. Probaremos que $\mathrm{id} \Vdash H$. Hay tres casos:

- E_1 es falsa. Entonces $|H| = |(\top \Rightarrow \bot) \Rightarrow (E_2 \Rightarrow F)|$. Si tomamos $t \Vdash \top \Rightarrow \bot$ y $u \cdot \pi \in \|E_2 \Rightarrow F\|$ tenemos que $\mathrm{id} \star t \cdot u \cdot \pi \succ t \star u \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$ por la observación 1.

...Idea de la prueba...

- E_1 es verdadera pero E_2 es falsa. Entonces $|H| = |\forall X(X \Rightarrow X) \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot) \Rightarrow F|$. Si tomamos $t \Vdash \forall X(X \Rightarrow X)$, $u \Vdash \top \Rightarrow \bot$ y $\pi \in \|F\|$, en particular $t \Vdash (\top \Rightarrow \bot) \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot)$. Como F es de la forma $A \Rightarrow B$, entonces por la observación 2. $t \star u \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$, concluyendo que $\mathrm{id} \star t \cdot u \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$.
- E_1, E_2 y F son verdaderas, entonces $|H| = |(\forall X.X \Rightarrow X) \Rightarrow (\forall X.X \Rightarrow X) \Rightarrow (\forall X.X \Rightarrow X)| = |(\forall X.X \Rightarrow X) \Rightarrow \mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Id}|$ donde $\mathrm{Id} = \forall X.X \Rightarrow X$. Como $\mathrm{id} \Vdash \mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Id}$, tenemos el resultado.

...Idea de la prueba

Sea $H := E_1 \Rightarrow E_2 \Rightarrow F$ con $F = e_1 \neq e_2$. Probaremos que $\lambda xy.xy\,\mathrm{id} \Vdash H$. Se presentan tres casos:

- Si F es verdadera (i.e.: $e_1^{\mathbb{N}} \neq e_2^{\mathbb{N}}$), entonces $|H| = \emptyset^{\perp\!\!\!\perp}$ y todos los términos la realizan.
- Si F es falsa, entonces $|H| = |E_1 \Rightarrow E_2 \Rightarrow \bot|$. Al menos una de las dos fórmulas E_1, E_2 debe ser falsa.
  - Si E_1 es falsa, entonces $|H| = |(\top \Rightarrow \bot) \Rightarrow E_2 \Rightarrow \bot|$ y es realizada por $\lambda xy.xy\,\mathrm{id}$ (el primer argumento realiza $\top \Rightarrow \bot$).
  - Si E_1 es verdadera y E_2 es falsa, entonces $|H| = |(\forall X.X \Rightarrow X) \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot|$. Sean $t \Vdash \forall X(X \Rightarrow X)$, $u \Vdash \top \Rightarrow \bot$ y $\pi \in \|\bot\| = \Pi$. En particular, $t \Vdash (\top \Rightarrow \bot) \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot)$, lo que implica que $t \star u \cdot \mathrm{id} \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$ y entonces $\lambda xy.xy\,\mathrm{id} \star t \cdot u \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$.

- Los naturales en la Realizabilidad de Krivine tienen una *representación canónica* que difiere de los enteros de Church por causa de la estrategia de reducción de la KAM (WHR). Llamaremos a esta representación *enteros de Krivine*.
- Sea un término $\mathbf{s} \Vdash \forall x.\, \mathrm{Nat}(x) \Rightarrow \mathrm{Nat}(\mathrm{s}\, x)$. Por ejemplo: $\mathbf{s} := \lambda nfx.f(nfx)$. El entero $\overline{\mathbf{0}}$ de Krivine es el de Church: $\overline{\mathbf{0}} := \lambda fx.x$. El entero $\overline{\mathbf{4}} := \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}\ \overline{\mathbf{0}})))$.
- <u>Intuición:</u> Un término $t \Vdash \mathrm{Nat}(4)$ es un programa que representa al valor 4 del tipo Nat en el modelo. La representación canónica es válida en todos los modelos.
- Agregamos al lenguaje de fórmulas una construcción: Sea A una fórmula y sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos $\{n\} \mapsto A$ como un parámetro mediante: $\|\{n\} \mapsto A\| := \{\overline{n} \cdot \pi \mid \pi \in \|A\|\}$.

- Un *operador de acumulación* es un término $T \in \mathrm{PI}$ tal que $T \Vdash \forall X \forall x[(\{x\} \mapsto X) \Rightarrow \mathrm{Nat}(x) \Rightarrow X]$.
- <u>Intuición:</u> T extiende a todo el tipo Nat programas que sólo sabemos que computan correctamente con enteros canónicos:

$$
\begin{tikzcd}
\{n\} \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & X \\
\mathrm{Nat}(n) \arrow[ur, Rightarrow, "Tf"'] &
\end{tikzcd}
$$

Del punto de vista computacional, T implementa la estrategia *call-by-value* en la KAM (que implementa la WHR, forma débil de la *call-by-name*).

Definición: Relaciones bien fundadas

Una relación binaria $R(x,y)$ es *bien fundada* si satisface

$$\forall X[\forall x(\underbrace{\forall y(R(y,x)\Rightarrow X(y))}_{\text{Hipótesis de Ind}} \Rightarrow \underbrace{X(x)}_{\text{Tesis de ind}}) \Rightarrow \forall z.X(z)].$$

Pensar R como una relación de orden y esta afirmación expresa el principio de inducción fuerte respecto de R. .

Teorema: La Realizabilidad preserva la buena fundación

Las relaciones bien fundadas en el modelo de base son bien fundadas en los modelos de Realizabilidad.

Para probar esto introducimos una **nueva construcción:** $e_1 = e_2 \hookrightarrow A$ donde A es una fórmula se define por su semántica de pilas:

$$\|e_1 = e_2 \hookrightarrow A\| := \begin{cases} \|\top\| = \emptyset & \text{Si } e_1^{\mathbb{N}} \neq e_2^{\mathbb{N}} \\ \|A\| & \text{Si } e_1^{\mathbb{N}} = e_2^{\mathbb{N}} \end{cases}$$

- *Operador de punto fijo de Turing*:
  $\Theta := (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$. **Ejercicio:** verificar que: $\Theta t \star \pi \succ t \star \Theta t \cdot \pi$.
- Supongamos que $R(y,x) \iff e_1(x,y) = e_2(x,y)$ es una relación bien fundada en el modelo de base $\mathbb{N}$. Probaremos que $\Theta \Vdash \forall Z \forall z[\forall x(\forall y(yRx \hookrightarrow Z(y)) \Rightarrow Z(x)) \Rightarrow Z(z)]$.
- Fijamos $P \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ y $t \Vdash \forall x(\forall y(yRx \hookrightarrow P(y)) \Rightarrow P(x))$. Basta con probar para todo $m \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{H}_m): \quad \forall \pi \in P(m) \quad \Theta \star t \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$$

Por la buena fundación de R basta con probar que $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ nRm \Rightarrow \mathcal{H}_n$.

- Supongamos que $\pi \in P(m)$. Tenemos $\Theta \star t \cdot \pi \succ t \star \Theta t \cdot \pi$. .

- *Operador de punto fijo de Turing*:
  $\Theta := (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$. **Ejercicio:** verificar que:
  $\Theta t \star \pi \succ t \star \Theta t \cdot \pi$.
- Supongamos que $R(y,x) \iff e_1(x,y) = e_2(x,y)$ es una relación bien fundada en el modelo de base $\mathbb{N}$. Probaremos que $\Theta \Vdash \forall Z \forall z [\forall x(\forall y(yRx \hookrightarrow Z(y)) \Rightarrow Z(x)) \Rightarrow Z(z)]$.
- Fijamos $P \in \mathcal{P}(\Pi)^{\mathbb{N}}$ y $t \Vdash \forall x(\forall y(yRx \hookrightarrow P(y)) \Rightarrow P(x))$.
  Basta con probar para todo $m \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{H}_m) : \quad \forall \pi \in P(m) \quad \Theta \star t \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$$

Por la buena fundación de R basta con probar que $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ nRm \Rightarrow \mathcal{H}_n$.

- Supongamos que $\pi \in P(m)$. Tenemos $\Theta \star t \cdot \pi \succ t \star \Theta t \cdot \pi$.
  Basta con probar que $\Theta t \Vdash \forall y(yRm \hookrightarrow P(y))$, que vale por la hipótesis de inducción $(\mathcal{H}_y)$ con yRm (**Ejercicio:** verificarlo).

- **Ejercicio:** Probar que
  $\lambda xy.yx \Vdash \forall X\left[(e_1 = e_2 \hookrightarrow X) \Rightarrow (e_1 = e_2 \Rightarrow X)\right]$ y
  $\lambda f.f\,\mathrm{id} \Vdash \forall X\left[(e_1 = e_2 \Rightarrow X) \Rightarrow (e_1 = e_2 \hookrightarrow X)\right]$.
- Concluir que entonces la relación bien fundada R puede también estar definida por una desigualdad $e_1 \neq e_2$ o por una igualdad de Leibiniz de la forma $e_1 = e_2$.
- Observación: En (PA2) se prueba por buena fundación en la relación $yRx \iff \mathrm{s}\,y = x$ que $\forall x^{\mathrm{Nat}} \forall y^{\mathrm{Nat}}(x \leq y \vee y \leq x)$.
- Definición (elementos iniciales): $x \in \mathbf{I}$ si y sólo si $x \not\geq 1$. Esta definición equivale a $x \neq \mathrm{S}(x-1)$ y a $\forall y(x \neq \mathrm{S}(y))$ (**Ejercicio** la identidad resuelve las equivalencias).
- Teorema: descomposición de todo individuo en suma de un inicial y un natural: $\forall x\ \exists! y \in \mathbf{I}\ \exists!^{\mathrm{Nat}} n\ \ x = y + n$. **Dem (sketch):** La **existencia** se prueba por buena fundación en la relación $yRx \iff \mathrm{s}(y) = x$ y entonces la Realizabilidad la preserva. La **unicidad** usa que el orden en Nat es total.

- En lo que sigue trabajaremos sobre un modelo particular de Realizabilidad Clásica: el *"Modelo de los hilos"*.
- Para que los teoremas sean válidos restringiremos las instrucciones de la (KAM) de modo de tener el control necesario sobre la evaluación de los procesos.
- Algunas de las técnicas que usaremos son reminiscentes de las que vimos en especificación: razonar por contraposición a partir de que un proceso no esté en $\perp\!\!\!\perp$.
- Los resultados que veremos pertenecen todos a Jean-Louis Krivine y están publicados en su artículo: *Realizability Algebras II: New Models of ZF + DC*. Logical Methods in Computer Science Vol. 8 (1:10) 2012, pp. 128.
- La presentación que veremos de estos resultados sigue la de Alexandre Miquel en 2014 y está disponible en: *A cardinals' heresy in classical realizability*

- ¿Cuál es la forma más simple de definir un modelo $\perp\!\!\!\perp$ coherente? Precisamos que ningún $t \in \mathsf{PI}$ realice $\perp$, i.e.:
  $\forall t \in \mathsf{PI} \quad \exists \pi_t \in \Pi \quad t \star \pi_t \notin \perp\!\!\!\perp$.
- Sea una biyección $t \mapsto \alpha_t$ entre los términos PI y las constantes de pila. Definimos el *Modelo de los hilos* como

$$\perp\!\!\!\perp_{Th} = \left(\bigcup_{t \in \mathsf{PI}} \mathsf{Th}(t \star \alpha_t) \right)^c$$

  Este modelo es coherente por definición.
- Fijamos de acá al final la KAM básica + $(\textsc{Quote})$, esto es:

Reglas de evaluación (modelo de los hilos):

$$\begin{array}{lrclcrcl}
(\text{Push}) & tu & \star & \pi & \succ_1 & t & \star & u \cdot \pi \\
(\text{Pop}) & \lambda x.t & \star & u \cdot \pi & \succ_1 & t\{x := u\} & \star & \pi \\
(\text{Save}) & \mathbb{C} & \star & t \cdot \pi & \succ_1 & t & \star & k_\pi \cdot \pi \\
(\text{Restore}) & k_\pi & \star & t \cdot \rho & \succ_1 & t & \star & \pi \\
(\text{Quote}) & \mathtt{quote} & \star & t \cdot \pi & \succ_1 & t & \star & \overline{n}_\pi \cdot \pi
\end{array}$$

Observación:

Los hilos $\mathrm{Th}(t \star \alpha_t)$ son dos a dos disjuntos: las constantes de pila "marcan" a qué único hilo puede pertenecer un proceso porque la reducción no las puede generar.

Proposición:

Sea H una constante inerte y no generativa y $u \Vdash \mathrm{Nat}(n)$. Consideramos $t := THu \in \mathrm{PI}$ donde T es el operador de acumulación del tipo Nat y consideramos la constante asociada α_t. Entonces:

1. $T \star H \cdot u \cdot \alpha_t \succ H \star \overline{n} \cdot \alpha_t$.
2. Si $u \Vdash \mathrm{Nat}(n) \cap \mathrm{Nat}(m)$ entonces $n = m$.

Demostración

1. **Ejercicio** Razonamiento de especificación en hilos.
2. Aplicando el resultado anterior, $T \star H \cdot u \cdot \alpha_t \succ H \star \overline{n} \cdot \alpha_t$ y $T \star H \cdot u \cdot \alpha_t \succ H \star \overline{m} \cdot \alpha_t$, de donde $n = m$.

Conclusión:

El principio de inducción $\forall x.\,\mathrm{Nat}(x)$ no es realizable en $\perp\!\!\!\perp_{Th}$.

- Sabemos que en $\perp\!\!\!\perp_{Th}$ el orden $\leq$ que hereda tiene mínimo 0 y no es acotado superiormente (porque todo se expresa con fórmulas de Horn).
- En cambio el orden no es total: La totalidad se puede expresar (por contraposición) como $(Tot) := \forall xy(x \not\leq y \Rightarrow y \not\leq x \Rightarrow \perp)$. Entonces $|Tot| = |\perp \Rightarrow \top \Rightarrow \perp| \cap |\top \Rightarrow \perp \Rightarrow \perp|$ (i.e.: el tipo del "o paralelo").

- Sea $\omega = \delta\delta$. Entonces para todo u, u', π, $\omega u k_\pi \Vdash \perp$ o $\omega u' k_\pi \Vdash \perp$. Esto se debe a que los dos no pueden estar en el hilo de la constante de π.
- $\theta := \lambda x.\,\mathbb{C}(\lambda k.x(\omega\bar{0}k)(\omega\bar{1}k)) \Vdash Tot \Rightarrow \perp$, lo que implica que el orden $\leq$ no es total en el modelo $\perp\!\!\!\perp_{Th}$.

- $(Tot)^{\mathrm{Nat}}$ es verdadera en $\perp\!\!\!\perp_{Th}$: $\forall x, y \in \mathrm{Nat}\,.(x \leq y \vee y \leq x)$ porque es un teorema de (PA2) relativizado al tipo Nat.

Conclusión:

En el modelo $\perp\!\!\!\perp_{Th}$ hay individuos que no son enteros, puesto que el orden $\leq$ restringido a Nat es total, pero en todo el modelo no lo es.

Teorema:

Mínimo y máximo del modelo de base definen un reticulado distributivo en $\perp\!\!\!\perp_{Th}$.

Demostración:

Definimos en el modelo de base $x \vee y := \max\{x, y\}$ y $x \wedge y := \min\{x, y\}$ y verificamos:

- En el modelo de base $(\mathbb{N}, \leq, \vee, \wedge)$ es un reticulado completo.
- Las fórmulas que expresan que un conjunto ordenado $(M, \leq)$ con dos operaciones binarias $\vee, \wedge$ es un reticulado distributivo son fórmulas de Horn (**Ejercicio**).

Problema:

Dados x, y en el modelo $\perp\!\!\!\perp_{Th}$ tales que $x < y$, ¿qué hay entre ambos?

- La fórmula $F(x,z,y) := x \leq z \leq y$ se puede expresar mediante la ecuación $(x - z) + (z - y) = 0$. De igual forma, $F(x, z_1, y) \wedge F(x, z_2, y)$ equivale a la ecuación $B(x, z_1, z_2, y) := (x - z_1) + (z_1 - y) + (x - z_2) + (z_2 - y) = 0$.
- Tenemos las siguientes equivalencias:

$$(\mathrm{I}) \quad \forall x, y\Big[x < y \Rightarrow \exists z_1, z_2(z_1 \not\leq z_2 \wedge z_2 \not\leq z_1 \wedge B(x, z_1, z_2, y))\Big] \iff$$

$$\forall x, y\Big[x \neq y \Rightarrow x \leq y \Rightarrow \exists z_1, z_2(z_1 \not\leq z_2 \wedge z_2 \not\leq z_1 \wedge B(x, z_1, z_2, y))\Big] \iff$$

$$\forall x, y\Big[x \neq y \Rightarrow \forall z_1, z_2(z_1 \not\leq z_2 \Rightarrow z_2 \not\leq z_1 \Rightarrow \neg B(x, z_1, z_2, y)) \Rightarrow x \not\leq y\Big]$$

Y todas esas fórmulas expresan que si $x < y$, entonces existen z_1, z_2 intermedios e incomparables.

Ejercicio

- Para todos $u, v_1, v_2, v_3 \in \Lambda$ y toda pila π al menos uno de los términos $k_\pi uv_1, k_\pi uv_2, k_\pi uv_3$ realiza $\perp$.
  Sugerencia: Razonar en el hilo de la constante de π, a lo sumo pueden aparecer dos de los tres términos.
- $\tau := \lambda xy.\, \mathbb{C}(y(k_\pi x\bar{\mathbf{0}})(y(k_\pi x\bar{\mathbf{1}})(k_\pi x\bar{\mathbf{2}}))) \Vdash$
  $\begin{cases} \perp \Rightarrow (\perp \Rightarrow \perp \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp \\ \top \Rightarrow (\mathrm{TOT}) \Rightarrow \perp \end{cases}$

- Observamos que la fórmula (I) tiene la misma semántica que la intersección de las semánticas de las fórmulas que realiza τ.
- Para esto, observemos que $|\forall\vec{x}[A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_k \Rightarrow e_1 \neq e_2]| = \bigcap_{\{\vec{x} \mid e_1^{\mathbb{N}} = e_2^{\mathbb{N}}\}} |A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_k \Rightarrow \perp|$
  (porque en los otros $\vec{x}$, $\|e_1 \neq e_2\| = \emptyset$).

$$\forall x, y \left[x \neq y \Rightarrow \forall z_1, z_2 (z_1 \not\leq z_2 \Rightarrow z_2 \not\leq z_1 \Rightarrow \neg B(x, z_1, z_2, y)) \Rightarrow x \not\leq y \right]$$

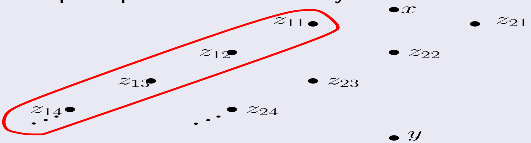
$$\begin{array}{lll} x \leq y & \left\{ \begin{array}{ll} x < y, & \begin{array}{l} z_1, z_2 \text{ entre } x \text{ e } y \\ |\neg B(x, z_1, z_2, y)| = |\bot| \end{array} \\ x = y, & z_1, z_2 \text{ entre } x \text{ e } y \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{caso 1} \\ \\ \text{caso 2} \end{array} \\ |x \not\leq y| = |\bot| & & \end{array}$$

En el caso 1 tenemos:

$$|\top \Rightarrow \big((\top \Rightarrow \bot \Rightarrow \bot) \cap (\bot \Rightarrow \top \Rightarrow \bot)\big) \Rightarrow \bot|$$

En el caso 2 tenemos: $|\bot \Rightarrow \big(\bot \Rightarrow \bot \Rightarrow \bot\big) \Rightarrow \bot|$

Este resultado + el axioma de elección dependiente (DC)[a] permite probar la existencia de cadenas infinitas descendentes entre cualquier par de individuos $y < x$:



[a]Recordar que tenemos a quote en la KAM

- Definimos $x \ll y \iff \mathrm{s}(x) \leq y$ y $\daleth_a := \{x \mid x \ll a\}$.

Observaciones:

- $\ll$ se define mediante $\leq$, que se define mediante $=$
- En el modelo de base, $\daleth_{n+1} = \{0, \ldots, n\}$ para todo n.
- $\forall x(x \ll 0 \Rightarrow \bot)$ es de Horn y entonces $\daleth_0 = \emptyset$ en $\perp\!\!\!\perp_{Th}$.
- $\forall x(x \ll 1 \Rightarrow x = 0)$ es de Horn y entonces $\daleth_1 = \{0\}$ en $\perp\!\!\!\perp_{Th}$.
- $\forall x(x > 1 \Rightarrow x \dot{-} 1 \neq 0)$ equivale a la fórmula de Horn $\forall x(x \dot{-} 1 = 0 \Rightarrow 1 \leq x \Rightarrow 1 = x)$ y entonces es cierta en $\perp\!\!\!\perp_{Th}$.
- En $\perp\!\!\!\perp_{Th}$, para todo $x > 1$, $\daleth_x$ contiene una cadena infinita descendente entre $x \dot{-} 1$ y 0. Entonces **todos los** $(\daleth_x)_{x>1}$ **son infinitos**.
- Sea f un símbolo de función. Entonces la fórmula que expresa que f es una biyección entre $\daleth_a$ y $\daleth_b$ es de Horn (**ejercicio**).
- En el modelo de base existe una biyección (primitivo-recursiva) $f_{a,b} : \daleth_{ab} \to \daleth_a \times \daleth_b$, de modo que en $\perp\!\!\!\perp_{Th}$ vale $\daleth_{ab} \approx \daleth_a \times \daleth_b$.

Proposición:

Dados $a \ll b$ no existe una función sobreyectiva $Z : \daleth_a \to \daleth_b$.

Sketch de la prueba:

Sea Z una variable de segundo orden de aridad 2.

- Expresamos que Z es una función mediante $\forall xyy'[Z(x,y) \Rightarrow Z(x,y') \Rightarrow y = y']$.
- Expresamos que Z es una sobreyección de $\daleth_a$ en $\daleth_b$ mediante $\forall y[y \ll b \Rightarrow \exists x(x \ll a \wedge Z(x,y))]$.
- Por razones técnicas reescribimos estas fórmulas así: $A(Z) := \forall xyy'[Z(x,y) \Rightarrow Z(x,y') \Rightarrow y \neq y' \Rightarrow \perp]$ $B(Z) := \forall y[y \ll b \hookrightarrow \neg\forall x(x \ll a \hookrightarrow \neg Z(x,y))]$.
- Y probamos que $\theta \Vdash \forall ab.\forall Z[a \ll b \hookrightarrow A(Z) \Rightarrow B(Z) \Rightarrow \perp]$ con $\theta := \lambda xy.\,\mathbb{C}(\lambda k.y(\lambda z.xzz(\omega zk)))$.

- Tenemos $\beth_2 \not\approx \beth_4 \approx \beth_2 \times \beth_2$ y además $\beth_2$ es infinito.
- Tenemos entonces un conjunto infinito $\beth_2$ que no es equipotente con $\beth_2 \times \beth_2$.
- Se prueba que $\forall a \geq 1$ el conjunto $\beth_a =\downarrow (a \dot{-} 1) := \{x \mid x \leq a \dot{-} 1\}$.
- También se prueba que en $\beth_2$ $\forall x, y \quad x \leq y \Leftrightarrow \exists f :\downarrow (x) \to \downarrow (y)$ inyectiva .
- Entonces, si $1 < a < b < 2$ tenemos que $\beth_a, \beth_b$ son infinitos, $\beth_a, \beth_b \subseteq \beth_2$ y no existe una inyección de $\beth_b$ en $\beth_a$.
- Como existe una cadena descendente infinita de puntos entre $1 < (x_n)_{n\in\mathbb{N}} < 2$, entonces esto determina una cadena infinita $(\beth_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ todos infinitos y tales que:
  - $\forall n \in \mathbb{N} \quad \beth_{x_{n+1}} \subseteq \beth_{x_n}$.
  - $\forall n \in \mathbb{N} \quad \beth_{x_{n+1}} \not\approx \beth_{x_n}$.

Conclusiones:

1. En $\perp\!\!\!\perp_{Th}$ vale el axioma de elección dependiente (porque en la KAM está quote), pero no el axioma de elección general (porque sinó $\gimel_2$ admitiría un buen orden y entonces sería equipotente con $\gimel_2 \times \gimel_2$).
2. Encontramos dentro de $\gimel_2$ una **cadena infinita estrictamente decreciente de conjuntos infinitos que son dos a dos no equipotentes**.

Teorema:

Existe en $\perp\!\!\!\perp_{Th}$ una función inyectiva $\Phi : \gimel_2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Conclusión: En $\perp\!\!\!\perp_{Th}$ la hipótesis del continuo es falsa: Existen infinitos conjuntos infinitos, 2 a 2 no equipotentes, todos incluidos en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.