

Equilibrio estático de cuerpos rígidos

Este es un texto complementario para el curso de Física 1. Definimos el concepto de *torque de una fuerza*, concepto es fundamental para entender la dinámica de los cuerpos rígidos. Se enuncian las condiciones necesarias para mantener el *equilibrio estático* de los cuerpos rígidos. La justificación rigurosa de estas condiciones, derivadas de las leyes de la mecánica se verás más adelante en el curso.

La situación de equilibrio estático es una situación especial, conceptualmente simple, que nos permite entender mejor las propiedades del torque y tiene aplicaciones importantes en la ciencia y la ingeniería.

Este material resume las secciones 3-5-3, 12-4, 14-1 y 14-2 del libro Física de Resnick-Halliday-Crane (4ª ed).

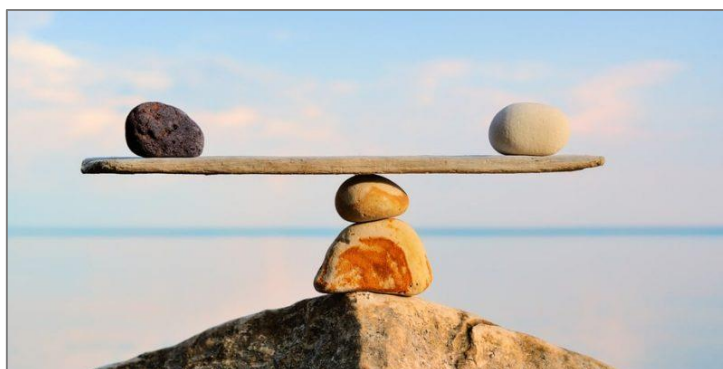


Figura 1. Ejemplo de cuerpos en equilibrio estático

Introducción

Las leyes de Newton fueron enunciadas para partículas, y sin embargo las hemos podido aplicar satisfactoriamente a objetos cotidianos que no pueden considerarse como puntos simples. El concepto de **centro de masa** nos ayuda a generalizar algunos de los resultados del modelo de partícula a casos más generales para entender algunas de las propiedades de un sistema de partículas. Nuestro próximo paso es desarrollar herramientas para el estudio de un **cuerpo rígido**, un modelo idealizado de un cuerpo real. En este modelo, el cuerpo se considera como un sistema de partículas que mantienen una posición fija entre sí. Muchos cuerpos de la vida real pueden ser descritos satisfactoriamente con este modelo.

Para poder estudiar la dinámica de un cuerpo rígido utilizaremos una magnitud vectorial llamada *torque de una fuerza* (también llamado *torca* o *momento de la fuerza*). Esta magnitud cuantifica la capacidad que tiene una fuerza en producir un cambio en el estado rotacional de un cuerpo (es decir, hacerlo girar más rápido o más lento). El torque es el análogo para las rotaciones de un cuerpo rígido de lo que la fuerza es para las traslaciones de un cuerpo. El valor del torque ejercido por una fuerza depende tanto el módulo de la fuerza como de su punto de aplicación y dirección, y se calcula como el producto vectorial de un vector de posición con la fuerza, como veremos a continuación.

Más adelante en el curso derivaremos las relaciones entre las cantidades que determinan la dinámica de los cuerpos rígidos. Mientras tanto, en forma introductoria, aquí nos vamos a enfocar en la situación especial del *equilibrio estático* de los cuerpos rígidos.

Producto vectorial

Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ en tres dimensiones formando entre sí un ángulo θ , su *producto vectorial* es el vector, representado como $\vec{v} \times \vec{u}$ o $\vec{v} \wedge \vec{u}$, definido de la siguiente manera:

- Su **módulo** es el producto de los módulos de ambos vectores y el seno del ángulo entre ellos:

$$|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}||\vec{u}| \sin \theta$$

- Su **dirección** es perpendicular a ambos vectores y, por lo tanto, perpendicular al plano formado por ellos en el espacio: $(\vec{v} \times \vec{u}) \perp \vec{v}$, $(\vec{v} \times \vec{u}) \perp \vec{u}$. En los casos en que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección o son opuestos, su producto vectorial es el vector nulo.
- El **sentido** queda dado de acuerdo la *convención de la mano derecha*: apuntando con los dedos de la mano derecha en el sentido del primer vector, y de manera que cerrando la mano nos acercamos al segundo vector, el dedo pulgar de la mano derecha indica el sentido del producto vectorial.

En la Figura 2 se representa el producto vectorial en un esquema en perspectiva. Es también usual el uso de los símbolos $\otimes$ y $\odot$ para indicar vectores entrantes o salientes al plano de un diagrama en dos dimensiones.

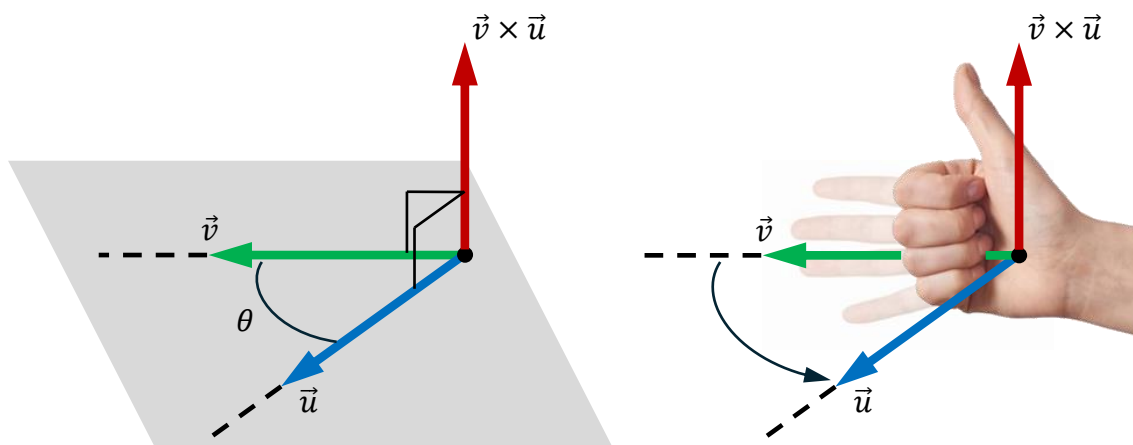


Figura 2. Representación en perspectiva del producto vectorial y de la regla de la mano

El orden de los factores del producto vectorial afecta el resultado, ya que la convención para elegir el sentido depende de este orden. Cuando se invierte el orden, se obtiene el vector opuesto al realizar el producto vectorial (es *anticonmutativo*):

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

El producto vectorial cumple la propiedad distributiva con respecto a la suma de vectores:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

para vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ arbitrarios. Es también (bi)homogéneo con respecto al producto por un escalar:

$$(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$$

Las dimensiones físicas del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ son el producto de las dimensiones físicas de los

vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$[\vec{u} \times \vec{v}] = [\vec{u}][\vec{v}]$$

Torque de una fuerza

Consideremos una fuerza $\vec{F}$ que actúa en cierto punto P. El punto P está identificado por su vector de posición $\vec{r}_{O,P}$, que va desde el origen del sistema de referencia O hasta el punto ($\vec{r}_{O,P} \equiv \vec{OP}$). Definimos el **torque** generado por la fuerza $\vec{F}$ con respecto al punto O como

$$\vec{\tau}_O = \vec{r}_{O,P} \times \vec{F}$$

Esta magnitud cuantifica la capacidad que tiene la fuerza aplicada de cambiar la velocidad angular del cuerpo rígido, haciéndolo girar más rápido o más lento.

Siempre se debe indicar el origen O utilizado en el cálculo del torque. En nuestra notación utilizamos el subíndice O en $\vec{\tau}_O$. Para aplicar las reglas del cálculo del producto vectorial, podemos considerar a los vectores $\vec{r}_{O,P}$ y $\vec{F}$ partiendo del mismo punto, trasladando uno ellos en forma paralela a sí mismo hasta que sus orígenes coincidan. La Figura 3 ilustra un ejemplo en perspectiva, donde la fuerza se aplica en un punto en la parte superior de un cubo. Tomando en cuenta la posición del origen O, para hallar el torque trasladamos la fuerza hasta el origen y efectuamos el producto vectorial $\vec{r}_{O,P} \times \vec{F}$. El vector obtenido es perpendicular al plano formado por los vectores.

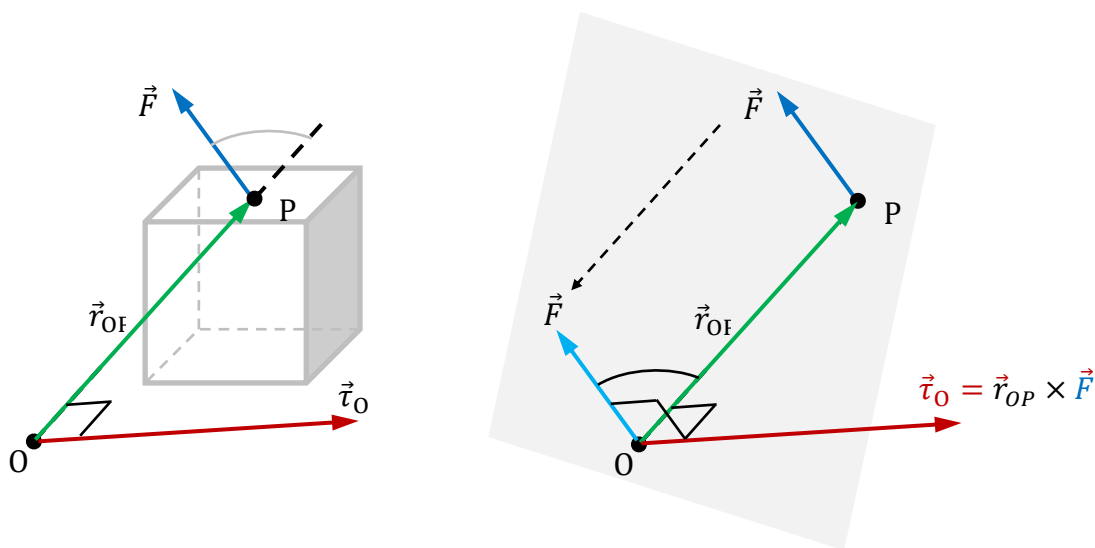


Figura 3. Ilustración del torque, con respecto al origen O, de la fuerza $\vec{F}$ aplicada en P.

Ejemplo de cálculo de torque

La Figura 4 muestra una viga que se articula alrededor del punto A. En el punto P cerca de uno de sus extremos, una cuerda tira de la viga con una fuerza $\vec{F}$ de 80 N en una dirección que forma 60° hacia abajo de la viga. La separación entre A y P es de 2.5 m.

¿Cuál es el torque con respecto al punto A que la cuerda ejerce sobre la viga?

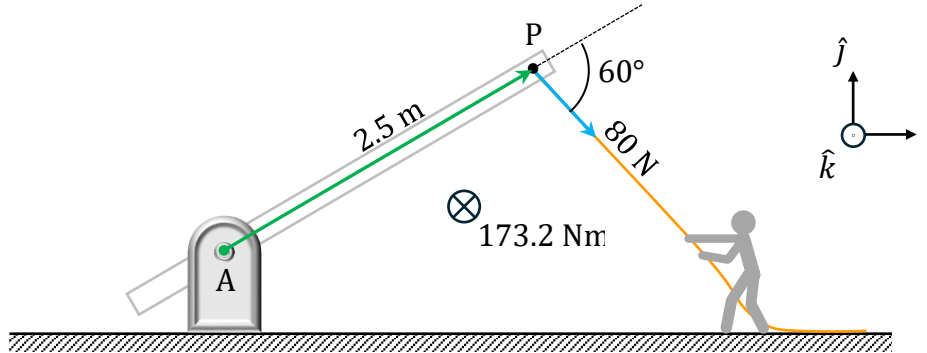


Figura 4. Utilizando una cuerda, se aplica una fuerza en el punto P de una viga, generando un torque con respecto al punto A.

Queremos hallar $\vec{\tau}_A = \vec{r}_{A,P} \times \vec{F}$. Para calcular el módulo del vector, multiplicamos el módulo de $\vec{r}_{A,P}$, el módulo de la fuerza y el seno del ángulo $\theta = 60^\circ$ entre los vectores:

$$|\vec{\tau}_A| = |\vec{r}_{A,P}| |\vec{F}| \sin \theta = 2.5 \text{ m} \cdot 80 \text{ N} \cdot \sin(60^\circ) \cong 173 \text{ Nm}$$

La dirección de $\vec{\tau}_A$ es perpendicular al plano que contiene a $\vec{r}_{A,P}$ y a $\vec{F}$. Este plano es precisamente el plano del dibujo de la figura 3 y, por lo tanto, $\vec{\tau}_A$ tiene una dirección perpendicular al dibujo.

Para determinar el sentido de $\vec{\tau}_A$ debemos aplicar la regla de la mano derecha, resultando que el vector tiene *sentido entrante* al plano del dibujo.

Para indicar el módulo, dirección y sentido de nuestro resultado podemos también emplear los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ que aparecen en la figura. El vector $\hat{k}$ es perpendicular al dibujo y tiene *sentido saliente*. Ya que $\vec{\tau}_A$ tiene el sentido opuesto, podemos escribir

$$\vec{\tau}_A = -(173 \text{ Nm})\hat{k}$$

Nuestra experiencia nos permite ver que en este ejemplo la viga no podrá mantenerse en equilibrio estático si solamente actúa sobre ella la fuerza de la cuerda. El efecto producido por este torque debe ser contrarrestado si queremos inmovilizar la viga.

Cuando sobre un cuerpo o sistema actúan varias fuerzas simultáneamente, el torque total debido al conjunto se obtiene sumando vectorialmente los torques individuales producidos por cada una de ellas, calculados con respecto a un mismo origen. Los torques verifican el principio de superposición:

$$\vec{\tau}_O^{\text{total}} = \vec{\tau}_O^{(1)} + \vec{\tau}_O^{(2)} + \dots + \vec{\tau}_O^{(N)} = \sum_{n=1}^N \vec{\tau}_O^{(n)}$$

Torque debido al peso

Podemos aplicar el principio de superposición para hallar el torque total debido al peso de cada partícula de nuestro sistema. Sumamos cada uno de los torques individuales calculados con respecto a un origen común O . Si las masas de las partículas son $m_1, m_2, \dots, m_n$, y se sitúan en las posiciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, nos queda

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_O^{\text{peso sist.}} &= \vec{\tau}_O^{(\text{peso 1})} + \vec{\tau}_O^{(\text{peso 2})} + \dots + \vec{\tau}_O^{(\text{peso n})} \\ &= \vec{r}_1 \times (m_1 \vec{g}) + \vec{r}_2 \times (m_2 \vec{g}) + \dots + \vec{r}_N \times (m_N \vec{g})\end{aligned}$$

Las propiedades del producto vectorial nos permiten rescribir este cálculo extrayendo el factor común $\vec{g}$ de cada término:

$$\vec{\tau}_O^{\text{peso sist.}} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N) \times \vec{g}$$

(cerca de la superficie terrestre asumimos que $\vec{g}$ tiene el mismo valor para cada partícula). Esta relación puede ser escrita en forma compacta utilizando la definición del centro de masa del sistema. La cantidad entre paréntesis es, en efecto, $M \vec{r}_{cm}$, donde $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ es la masa total del sistema. Por lo tanto, el torque ejercido por el peso sobre el sistema puede ser escrito como

$$\vec{\tau}_O^{\text{peso sist.}} = (M \vec{r}_{cm}) \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times (M \vec{g})$$

Encontramos entonces que el torque resultante debido a los pesos de las partes del sistema es equivalente al torque debido al peso de una partícula con la masa total del sistema situada en su centro de masa. Aunque nuestro razonamiento se basó en un número discreto de partículas, el resultado se generaliza a distribuciones continuas de masa.

Condiciones de Equilibrio Estático

Un cuerpo se halla en *equilibrio estático* si permanece completamente en reposo.

En el caso de una partícula puntual, estar en equilibrio estático equivale a decir que su velocidad instantánea es nula y permanece constante. De acuerdo con la primera ley de Newton, el Principio de Inercia, la fuerza neta que actúa sobre esta partícula tiene que ser nula.

En un sistema de partículas, la aceleración del centro de masa es determinada por la fuerza total que actúa sobre el sistema. Tomando al cuerpo rígido como un agregado de partículas, concluimos que para que su centro de masa esté en equilibrio y pueda permanecer en reposo, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo tiene que ser cero. Esta condición es llamada *equilibrio traslacional*.

Sin embargo, a diferencia de un cuerpo puntual, un cuerpo real puede encontrarse rotando independientemente del movimiento de su centro de masa. Para que el cuerpo se encuentre totalmente en reposo no es suficiente que el centro de masa esté en reposo, sino que cada una de sus partículas componentes deben tener velocidad nula.

Pensemos, por ejemplo, en un ventilador. Cuando sus aspas giran, el centro de masa del ventilador se mantiene fijo en el espacio, pero el sistema no se encuentra en equilibrio estático. Solamente al detenerse por completo se cumple la condición.

En nuestro modelo de un cuerpo totalmente rígido, cada punto del cuerpo permanece siempre

en una posición fija relativa a su centro de masa. El estado de movimiento del cuerpo queda totalmente determinado por la velocidad $\vec{v}_{cm}$ del centro de masa y por la *velocidad angular* de rotación $\vec{\omega}$ alrededor del centro de masa¹. En el caso de un cuerpo rígido en reposo, la velocidad angular permanece en un valor constante nulo, $\vec{\omega} = 0$.

Un torque neto sobre el cuerpo (con respecto a un punto cualquiera) da lugar a una *aceleración angular*, que cambia la velocidad angular y hace que el cuerpo gire más o menos rápido. La forma precisa en que esto sucede se desprende de las leyes de Newton aplicadas al cuerpo rígido, como veremos más adelante en el curso.

Para poder mantenerse en reposo sin rotar, el torque neto que actúa sobre el cuerpo tiene que ser cero. Esta condición es llamada *equilibrio rotacional*.

Para que un objeto se encuentre en equilibrio estático debe estar tanto en equilibrio traslacional como rotacional. Tomando en cuenta las observaciones anteriores, son **condiciones necesarias para el equilibrio estático** que tanto la fuerza neta como el torque neto actuando sobre el cuerpo sean nulos:

$$\begin{cases} \vec{F}^{\text{neta}} = \vec{0} \\ \vec{\tau}_O^{\text{neta}} = \vec{0} \end{cases}$$

Cuando calculamos la fuerza neta sumando todas las fuerzas sobre el cuerpo, las fuerzas internas al sistema se cancelan entre sí, y por lo tanto solo es necesario considerar las fuerzas externas. En forma análoga, cuando sumamos todos los torques sobre el cuerpo, los torques internos al sistema se cancelan entre sí, y por lo tanto solo es necesario tomar en cuenta los torques externos al sistema².

$$\begin{cases} \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \\ \vec{\tau}_O^{\text{ext}} = \vec{0} \end{cases}$$

Estas relaciones son similares al principio de inercia para una partícula. Un cuerpo puntual en reposo permanece en reposo a menos que sobre el mismo actúe una fuerza neta. Pese a que dejamos pendiente deducir las relaciones de equilibrio para un cuerpo rígido a partir de las leyes de Newton para partículas, podemos afirmar que las ecuaciones son válidas desde un punto de vista puramente empírico. De no ser así, observaríamos que algún cuerpo en reposo podría cobrar un movimiento espontáneamente, aunque no reciba la acción de ninguna fuerza o torque externo.

Independencia del origen

Para que el cuerpo esté en equilibrio estático, la condición de equilibrio rotacional debe cumplirse independientemente del origen O elegido. Ocurre que, si las fuerzas que actúan sobre el sistema verifican (i) la condición de equilibrio traslacional y (ii) la condición de equilibrio

¹ El módulo de $\vec{\omega}$ indica la rapidez con la que el cuerpo gira; su dirección indica el eje de rotación y su sentido define el sentido de la rotación según la convención de la mano derecha.

² Que la suma de las fuerzas internas se cancela es una consecuencia directa de la tercera ley de Newton, el principio de acción y reacción. Para asegurar que la suma de los torques internos se cancelan entre sí, hay que utilizar la *forma fuerte* del principio de acción y reacción: las fuerzas que dos partículas ejercen entre sí son opuestas y apuntan en la dirección entre las partículas.

rotacional con respecto a un origen dado O , entonces también cumplen la condición de equilibrio rotacional con respecto a cualquier otro origen O' .

Esta afirmación se puede demostrar rápidamente observando la relación entre los vectores de posición de un punto P con respecto a los diferentes orígenes: $\vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP}$. Consideremos la fuerza $\vec{F}^{(n)}$ actuando sobre los puntos P_n del sistema ($n = 1, 2, \dots$). Empleando las propiedades del producto vectorial, cuando calculamos el torque neto sobre el sistema respecto a O' tenemos

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{O'}^{\text{neto}} &= \sum \vec{r}_{O',P_n} \times \vec{F}^{(n)} \\ &= \sum \vec{r}_{O',O} \times \vec{F}^{(n)} + \sum \vec{r}_{O,P} \times \vec{F}^{(n)} \\ &= \vec{r}_{O',O} \times \left(\sum \vec{F}^{(n)} \right) + \vec{\tau}_O^{\text{neto}} \\ &= \vec{\tau}_O^{\text{neto}} = \vec{0}\end{aligned}$$

donde empleamos las condiciones de equilibrio estático para llegar al resultado final.

En la Figura 5, la lasca horizontal experimenta su propio peso y las fuerzas de reacción en su contacto con las diferentes piedras. No solamente la fuerza neta debe ser nula, sino que el torque neto también. Para ello, es preciso colocar cuidadosamente cada roca a una distancia adecuada para que los diferentes torques se anulen entre sí.

El esquema muestra las diferentes fuerzas externas sobre la lasca y los torques que ejercen, calculados con respecto al punto de apoyo O (la fuerza $\vec{F}_2$ es el peso de la lasca actuando en su centro de masa).

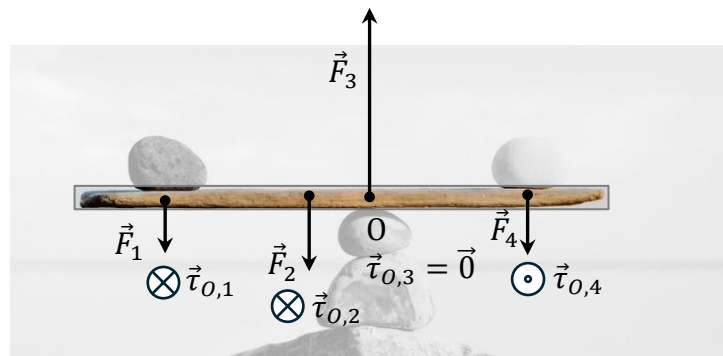


Figura 5. El cuerpo rígido se mantiene en equilibrio estático porque tanto la fuerza externa como el torque externo sobre el mismo son nulos.