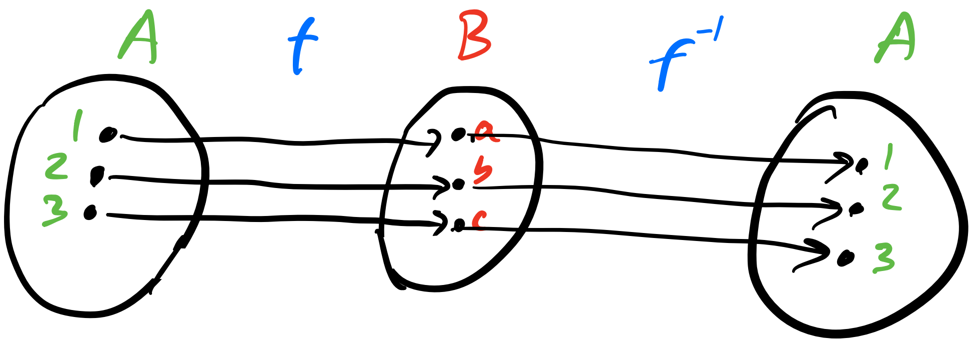
Recordatorio: $f : A \to B$ función es biyectiva

sii f es inyectiva y sobreyectiva.

sii para todo $b \in B$, $\exists!\, a \in A \,/\, f(a) = b$



Cuando $f: A \to B$ es biyectiva podemos considerar

$f^{-1}: B \to A$ donde $f^{-1}(b) = a$ sii $f(a) = b$.

Lo que cumple f^{-1} es que

$$f^{-1} \circ f = Id_A$$

$$f \circ f^{-1} = Id_B$$

es decir

$$f^{-1} \circ f(a) = a \quad \forall a \in A$$

$$f \circ f^{-1}(b) = b \quad \forall b \in B$$

Inversas de funciones reales

Corolario de Bolzano: Sea I un intervalo y $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $\operatorname{Im}(f) = \{ f(x) \,/\, x \in I \}$ es un intervalo.

Intervalos = $[a,b]$ (a,b)
$[a,b)$ $(a,b]$
$[a,+\infty)$ $(a,+\infty)$
$(-\infty,a]$ $(-\infty,a)$
$\mathbb{R}$

Caracterización del intervalo

$A \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo sii

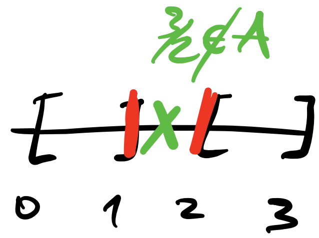
$x < y < z$ con $x,z \in A \Longrightarrow y \in A$

Ej: $A = [0,+\infty)$ es un intervalo

$x < y < z$ $x,z \in A \Longrightarrow y \in A$

NO EJEMPLO:

$A=[0,1]\cup[2,3]$ no es un intervalo



Porque, $1 \in A$
$2 \in A$ pero $\frac{3}{2} \notin A$

Para probar el corolario de Bolzano, usaremos la caracterización del intervalo.

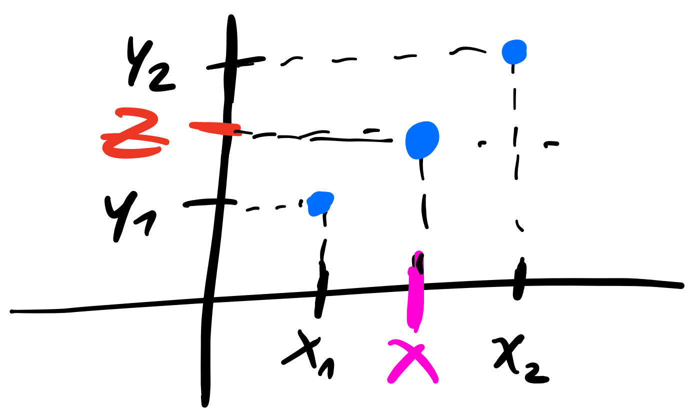
Sean $y_1, y_2 \in Im(f)$ y $z \in \mathbb{R}$ /

$y_1 < z < y_2$. Queremos ver que $z \in Im(f)$

Como $y_1, y_2 \in Im(f)$,

$\exists\, x_1, x_2 \in I$ /

$f(x_1) = y_1$; $f(x_2) = y_2$

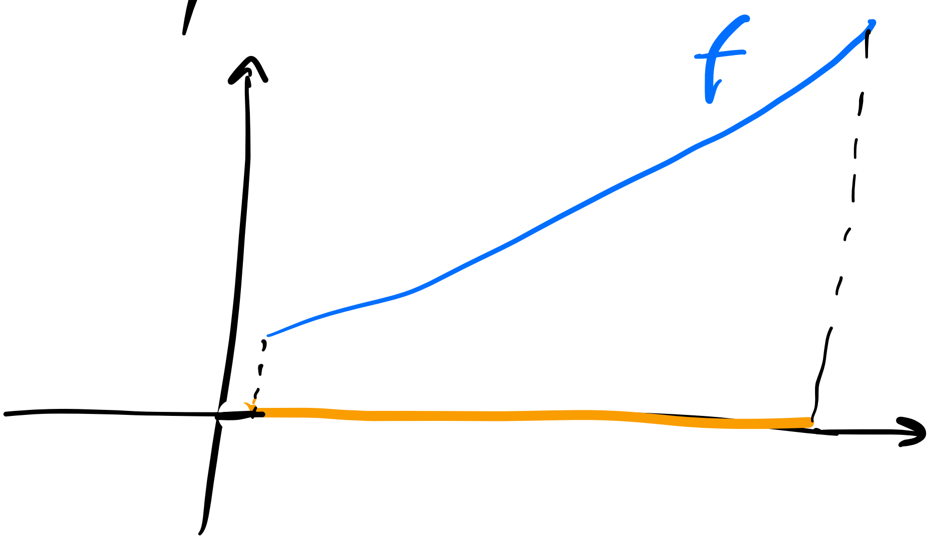


Como f es continua en $[x_1, x_2]$ y $f(x_1) < z < f(x_2)$, el teorema de los valores intermedios nos dice que $\exists\, x \in I \,/\, f(x) = z$

Luego, por la caracterización del intervalo, tenemos que $Im(f)$ es un intervalo

---

Sea I un intervalo y $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y continua.



Entonces, por el corolario de recién $\mathrm{Im}(f)$ es un intervalo, que llamaremos J.

Luego $f: I \longrightarrow J$ es biyectiva.
(f es inyectiva por ser estrictamente creciente
y f es sobreyectiva porque $J = \mathrm{Im}(f)$)

En este caso, se cumple que

$$f^{-1}: J \longrightarrow I \text{ es continua}$$

y estrictamente creciente.

"la inversa de una función continua es continua"

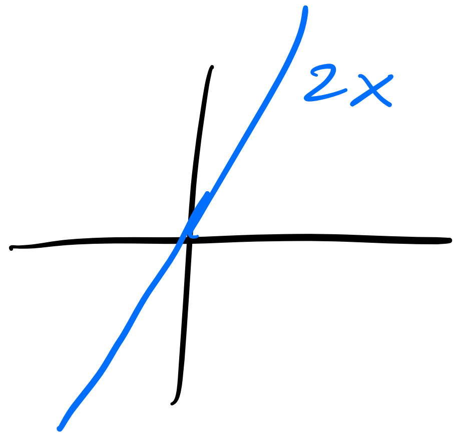
Ejemplos

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$f(x)=2x$,

f es estrictamente creciente

y $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$



¿Quién es $f^{-1}(y)$?

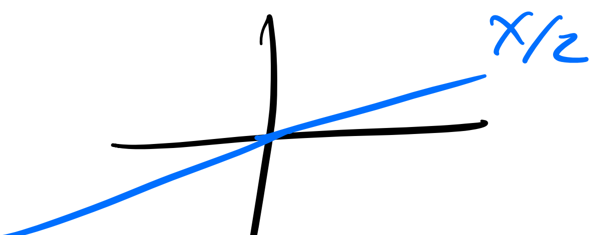
Tenemos que resolver

$$f(x)=y$$

$$2x=y \iff x=y/2$$

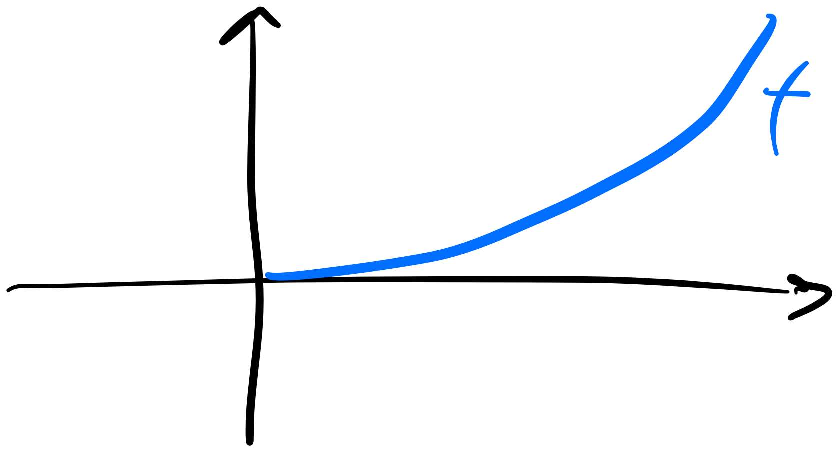
Entonces $f^{-1}(y)=y/2$

Entonces $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es $f^{-1}(x)=x/2$



Ejemplo: $f:[0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$

definida como $f(x) = x^2$



f es continua y estrictamente creciente

$Im(f) = [0,+\infty)$.

Entonces $f^{-1}: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$

es continua y estrictamente

creciente

Entonces $f^{-1}: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$

es continua y estrictamente

creciente

Observar $\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x}}$

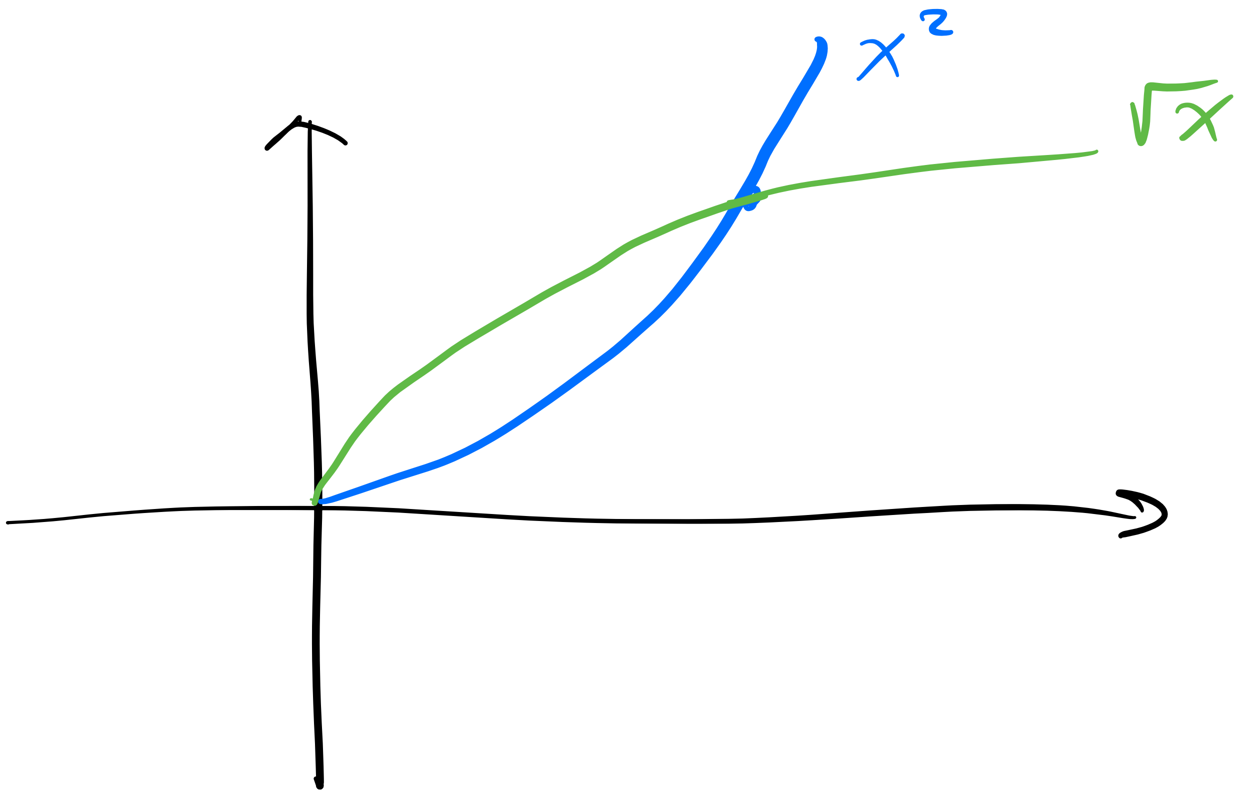


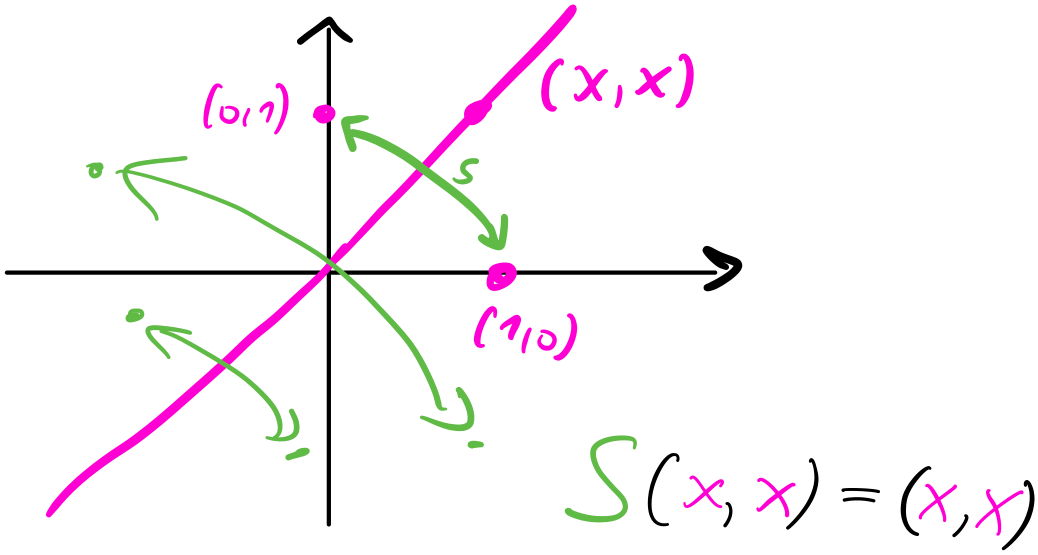
Gráfico de la función inversa

Sea $f : I \longrightarrow J$ biyectiva

$$\text{Gráfico}(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y = f(x) \wedge x \in I \right\}$$

<u>Paréntesis</u>: La simetría axial con eje la diagonal es la biyección del plano en sí mismo definida por la fórmula

$$(X, Y) \xrightarrow{S} (Y, X)$$



¿Qué pasa cuando le aplicamos S a Gráfico(f)?

$$S(\text{Gráfico}(f)) = \{(y,x) \,/\, y = f(x) \wedge x \in I\} =$$

$$= \left\{(y,x) \,/\, \begin{array}{l} x = f^{-1}(y) \wedge \\ y \in J \end{array}\right\}$$

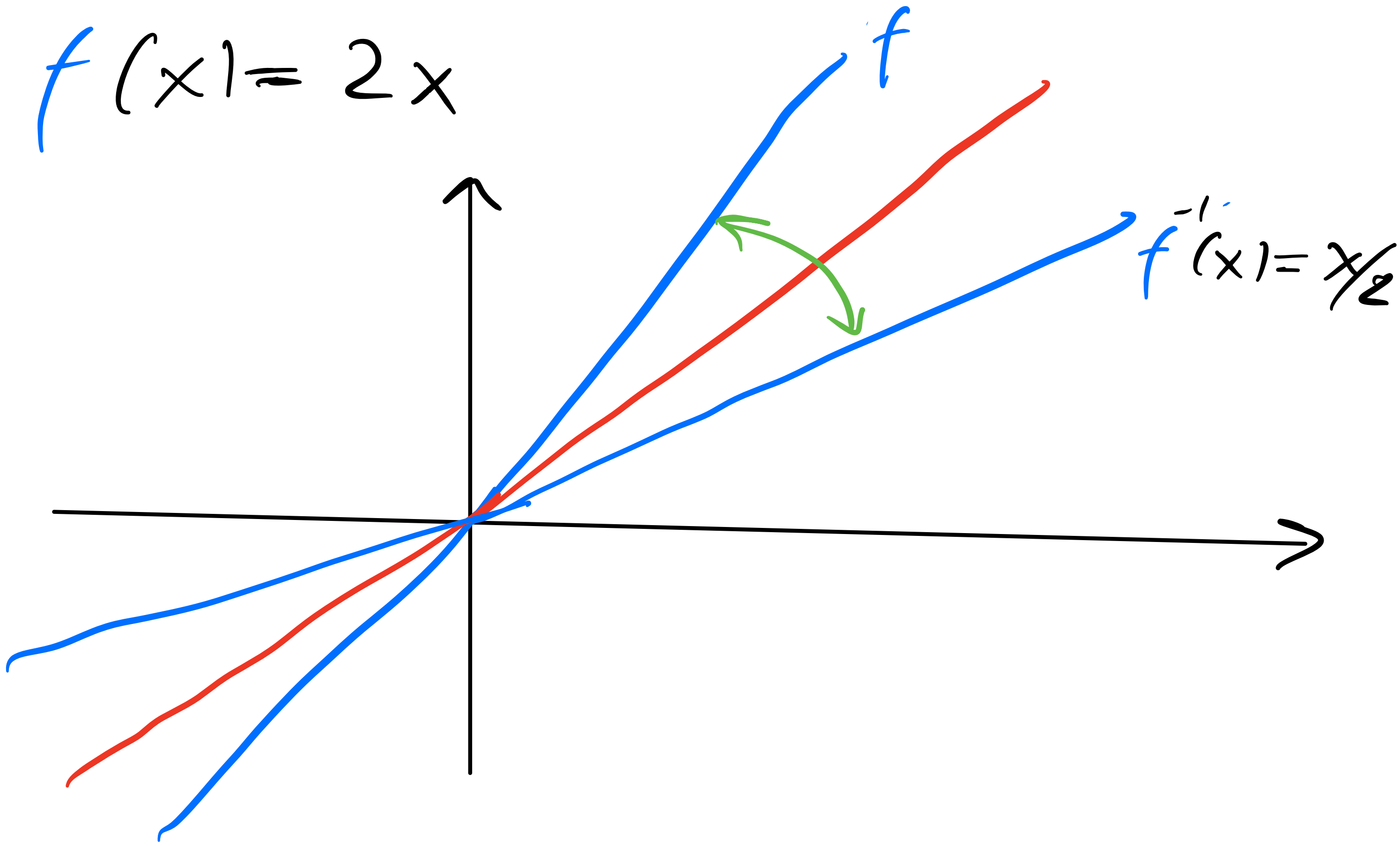
$$= \text{Gráfico}(f^{-1})$$

"El gráfico de f^{-1} se obtiene aplicando la simetría axial respecto de la diagonal al gráfilo de f"

Ejemplos:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

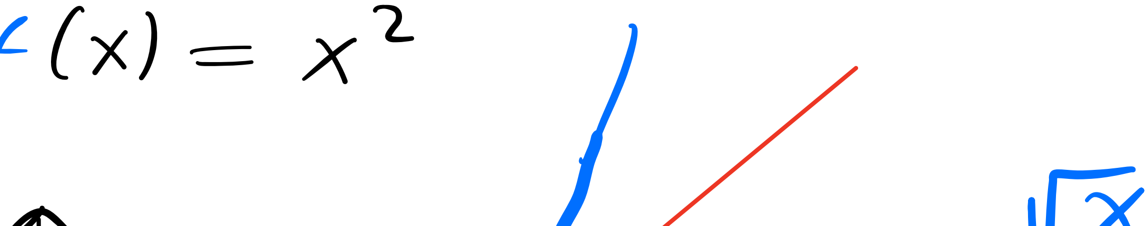
$f(x) = 2x$

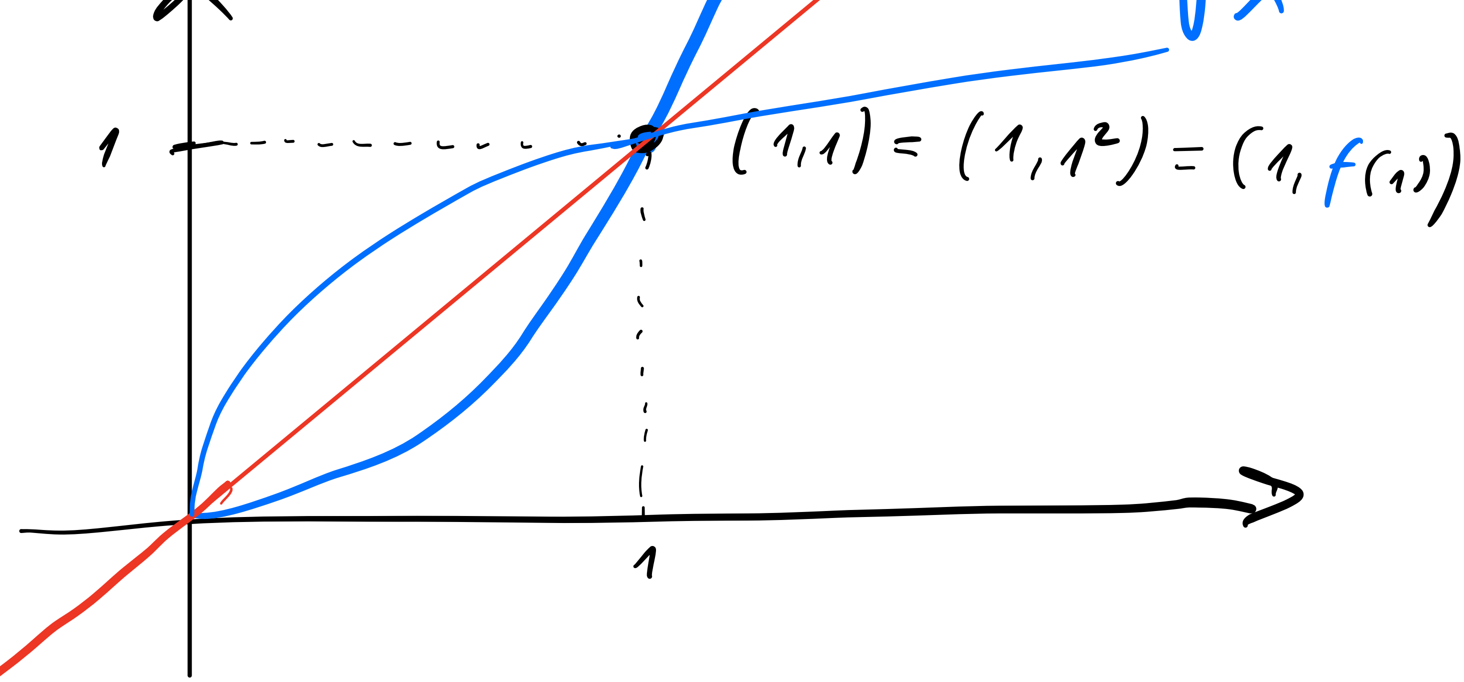


Otro ejemplo:

$f: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida como

$f(x) = x^2$



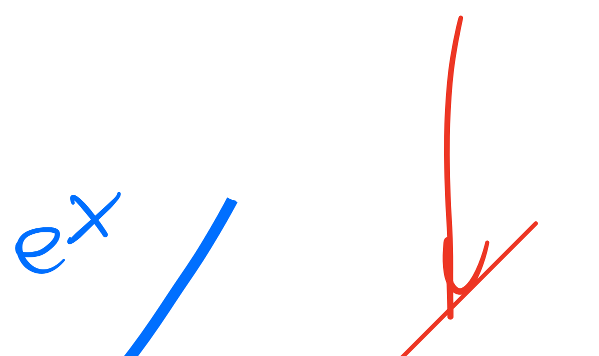


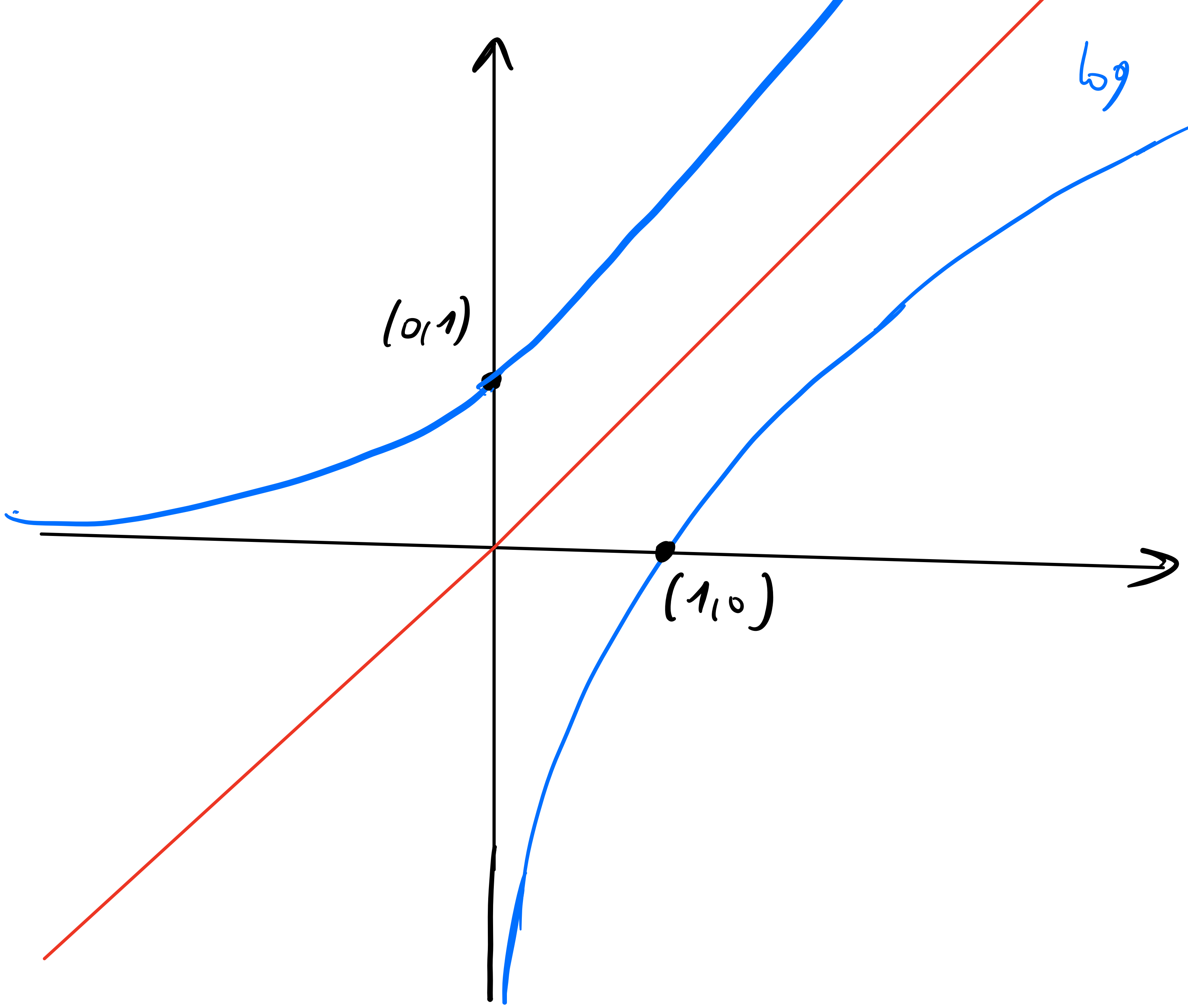
$f:[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \log(x)$

La inversa la llamamos función exponencial

$$\log^{-1}(x) =: e^x$$

$\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$

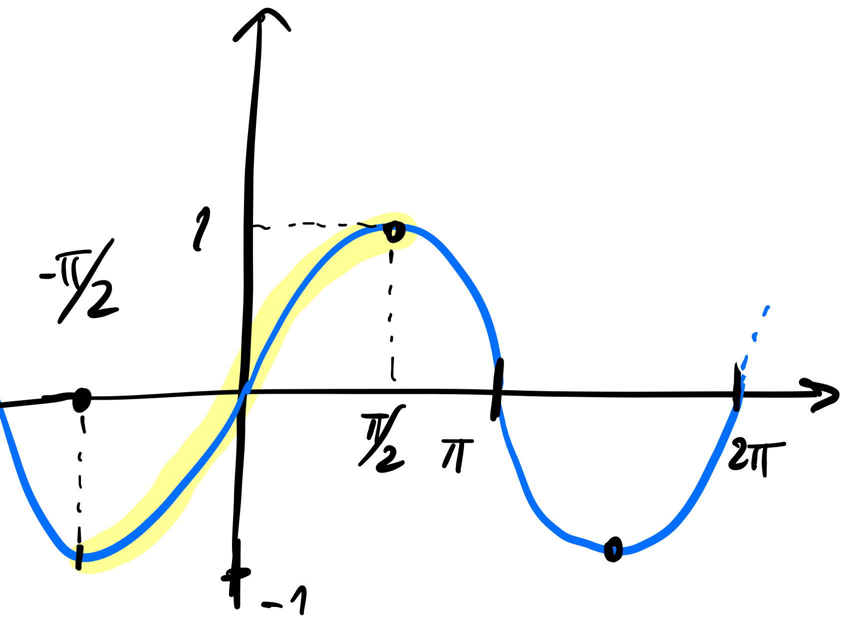




Inversas de las funciones trigonométricas

Precisamos restringir los dominios para que las funciones se vuelvan inyectivas.

$f(x) = \text{sen}(x)$



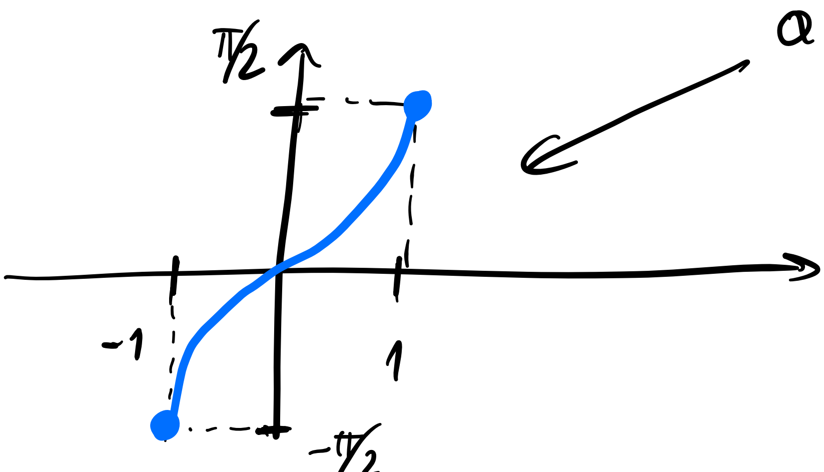
restringimos f al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$

donde es inyectiva. y tenemos

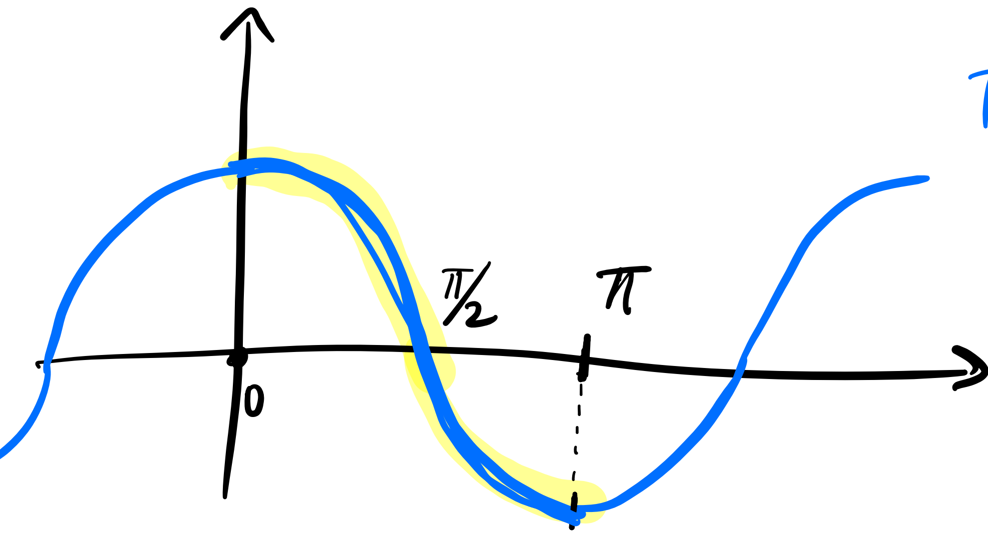
$f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ biyectiva

$f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ f

arcsen(x)



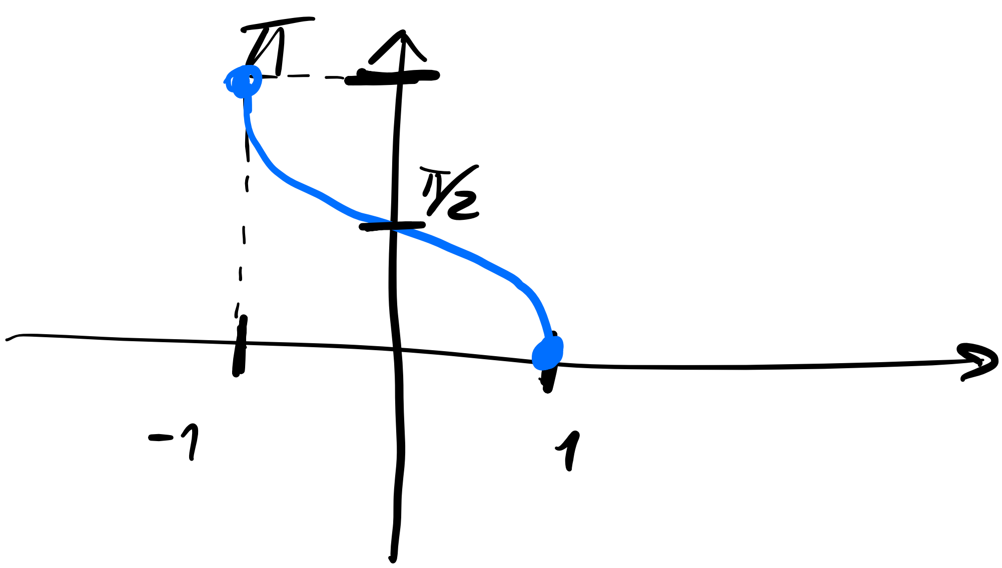
f^{-1} se llama arcsen



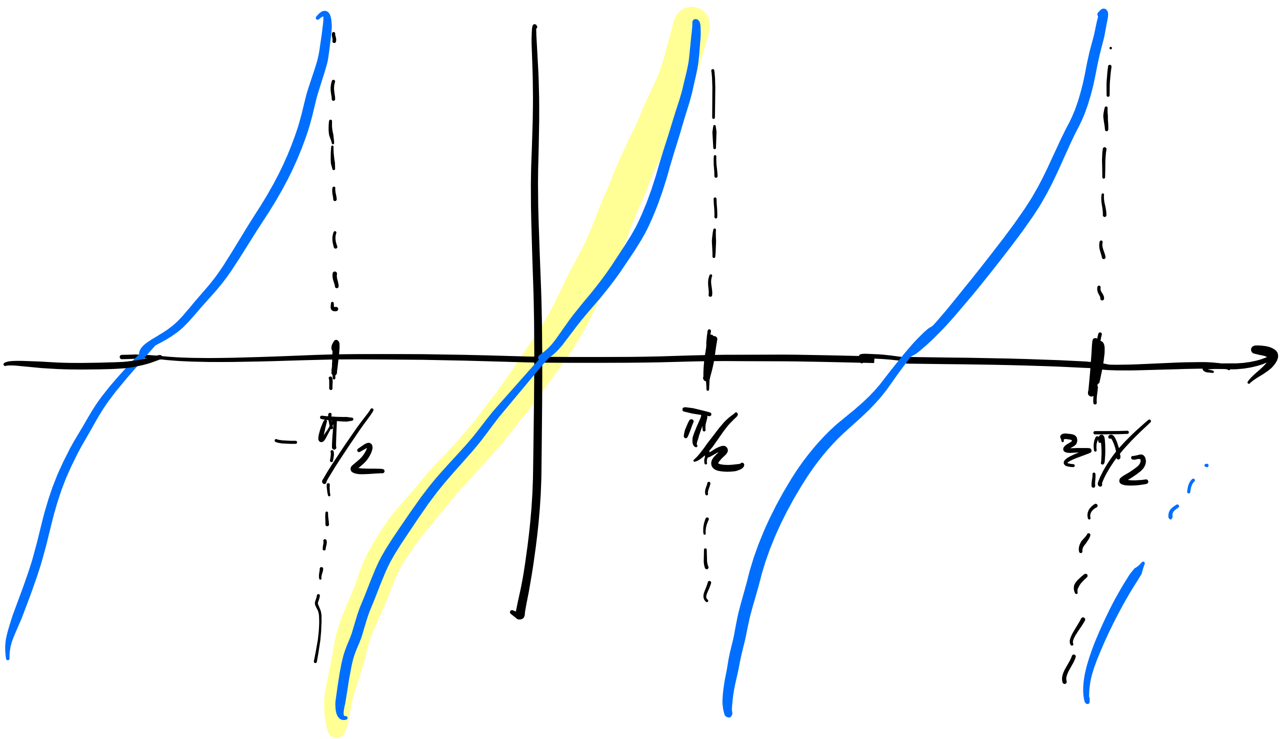
$f(x) = \cos(x)$

Restringimos cos al intervalo $[0, \pi]$ para que quede biyectiva.

$f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$



f^{-1} se llama $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.



Restringimos tg a $[-\pi/2, \pi/2]$ y obtenemos $f^{-1} = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$