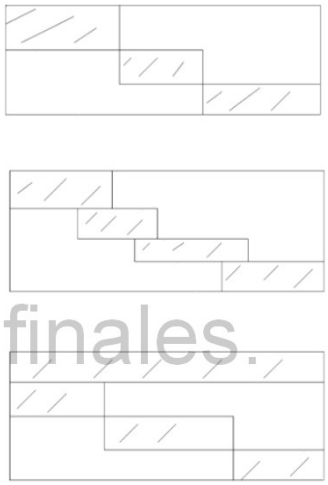
TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN EN PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Dr. Víctor M. Albornoz
Departamento de Industrias.
Campus Santiago Vitacura, Chile.
Universidad Técnica Federico Santa María

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, UdelaR.
Montevideo, lunes 12 de Mayo de 2025

CONTENIDO

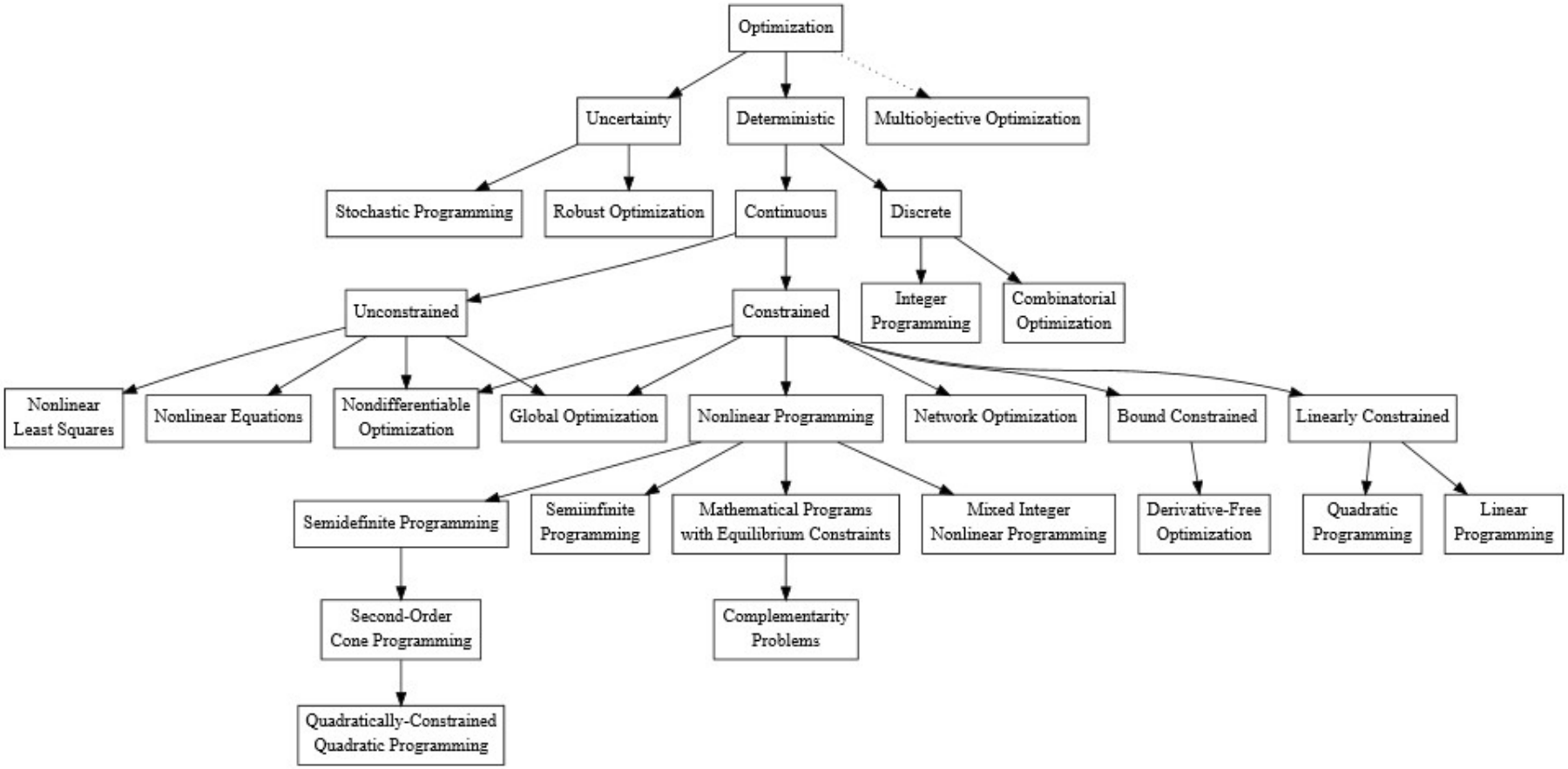
1. Introducción a los Métodos de Descomposición.
2. Formulación y resolución de modelos en AMPL.
3. Método de Benders.
4. Generación de Columnas.
5. Método de Dantzig & Wolfe.
6. Conclusiones, Extensiones y palabras finales.



2.- Formulación y resolución de modelos en AMPL

En apoyo a la toma de decisiones en problemas de naturaleza real, la Investigación de Operaciones contempla metodologías como los *modelos de optimización* para encontrar la mejor solución a un problema o simplemente generar buenas decisiones admisibles.

Los *modelos de optimización* son muy variados dada la naturaleza de las decisiones y el problema abordado.



Al formular un modelo de optimización uno comúnmente expresa de manera algebraica la función objetivo y las distintas ecuaciones e inecuaciones que definen las restricciones del problema en términos de sus variables de decisión.

Set

L = the set of locations

Parameters

x_i = the x-coordinate for location i, $\forall i \in L$

y_i = the y-coordinate for the location i, $\forall i \in L$

d_i = projected demand for the next period for location i, $\forall i \in L$

s_i = number of helicopters currently assigned to location i, $\forall i \in L$

c = transportation cost per kilometer

$dist_{ij}$ = Euclidean distance between location i and location j, $\forall i \in L \forall j \in L$

$dist_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$

Variables

z_{ij} = number of helicopters to be moved from location i to j, $\forall i \in L \forall j \in L$

Objective Function

Minimize $\sum_{(i,j) \in L \times L} dist_{ij} * c * z_{ij}$

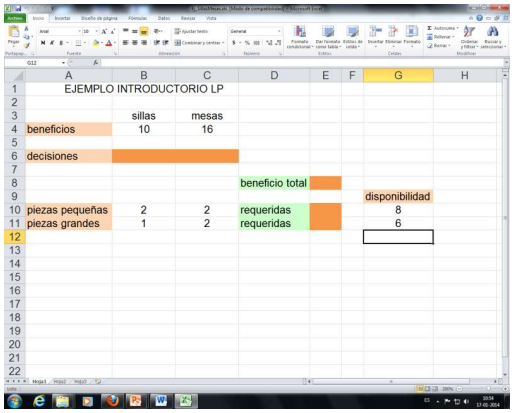
Constraints

Flow balance constraint for each location i in set L

$\sum_{j \in L} z_{ji} + s_i = d_i + \sum_{j \in L} z_{ij}, \forall i \in L$

Para la resolución computacional de un modelo de optimización existen diferentes alternativas.

Estas incluyen software basado en el uso de planillas electrónicas y bibliotecas de rutinas que es posible invocar en un programa con un lenguaje de programación dado, con un cierto formato para la representación y carga del respectivo modelo.



Complementa lo anterior la existencia de *lenguajes de modelado algebraico* que permiten emplear la notación común para la representación de modelos y una sintaxis simple en el desarrollo de algoritmos.

Estos *lenguajes* existen desde fines de los años 70 y fueron creados considerando inicialmente problemas de programación lineal. En particular, el desarrollo de AMPL se inicia en 1985.

Algunos programas de modelado algebraico son:

AIMMS

AMPL

GAMS

JuMP

LINGO

MPL

OPL Studio

PLAM

Pyomo

Estos software deben ser utilizados conjuntamente con un solver de acuerdo a la naturaleza del modelo a resolver, por ejemplo:

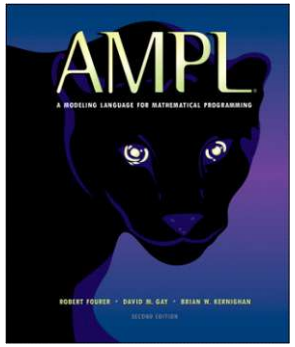
cplex, gurobi, knitro, minos y xpress.

Sin embargo, en numerosas situaciones estos solvers pueden ser insuficientes ante problemas complejos y de gran tamaño.

Descarga versión académica de AMPL está disponible en la página del curso en EVA.

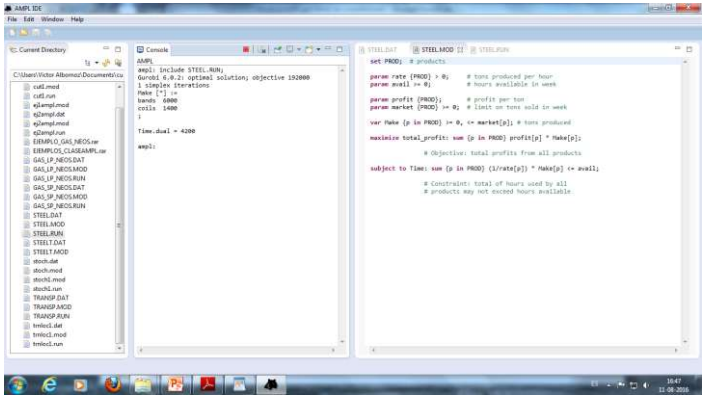
Manual AMPL

https://ampl.com/resources/books/ampl-book/



AMPL permite representar modelos de optimización en términos algebraicos expresados con la ayuda de conjuntos de índices y sus principales operaciones.

Toda la información contempla diferentes archivos con las extensiones: **.mod** (para el modelo), **.dat** (para los datos del modelo) y **.run** (para la ejecución del modelo).



En lo concerniente a la representación de un modelo en AMPL, este se declara en un archivo .mod, representando el mismo con los siguientes elementos y comandos:

- Conjuntos de índices (set),
- Parámetros (param),
- Variables de decisión (var),
- Función objetivo (minimize/maximize) y
- Restricciones (subject to).

Ejemplo 1. Modelo de producción multi-producto:

Conjunto e índices.

P = conjunto de productos, con subíndice $p \in P$

Parámetros.

u_p = beneficio por tonelada del producto $p \in P$.

r_p = ton producidas del producto $p \in P$ por hora.

av = horas disponibles de producción.

d_p = demanda máxima del producto $p \in P$.

Variable de decisión.

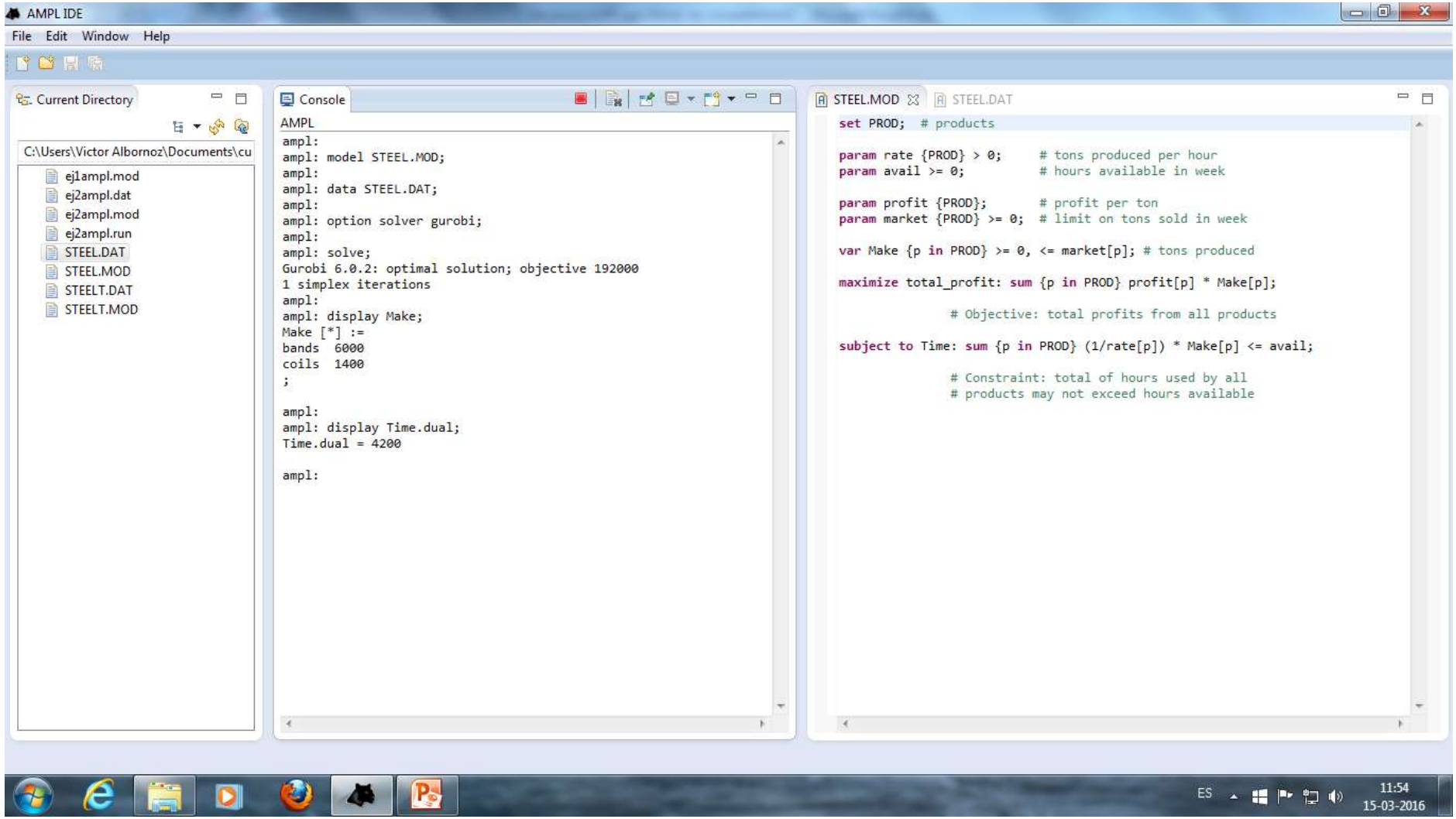
X_p = toneladas elaboradas del producto $p \in P$

$$\text{Max} \quad \sum_{p \in P} u_p X_p$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{p \in P} (1/r_p) X_p \leq av$$

$$0 \leq X_p \leq d_p \quad p \in P$$

El modelo de producción en AMPL puede revisarse en los archivos STEEL.MOD y STEEL.DAT:



Ejemplo 2. Consideramos un problema muy relevante a nivel táctico correspondiente al de *planificación agregada de la producción*.

Este problema consiste en hallar una política óptima de producción de un determinado conjunto de productos para satisfacer demandas fluctuantes en el tiempo, de modo de minimizar costos de producción e inventario, considerando la disponibilidad de diversos recursos escasos.

Parámetros.

c_{pt} = costo unitario de producción del producto p en periodo t.

h_{pt} = costo unitario de inventario del producto p en periodo t.

u_{pt} = beneficio por unidad del producto p en periodo t.

d_{pt} = demanda máxima de unidades de producto p en t.

r_p = unidades producidas del producto p por hora.

av_t = horas disponibles de producción en periodo t.

I_{p0} = inventario inicial del producto p.

Por su parte, las *variables de decisión* del modelo corresponden a:

X_{pt} = unidades elaboradas del producto p en periodo t

I_{pt} = nivel de inventario del producto p al término de periodo t

S_{pt} = unidades vendidas del producto p en periodo t

Modelo de Producción multi-producto con múltiples periodos

$$\text{Max } \sum_p \sum_t (u_{pt} S_{pt} - c_{pt} X_{pt} - h_{pt} I_{pt})$$

s.a.

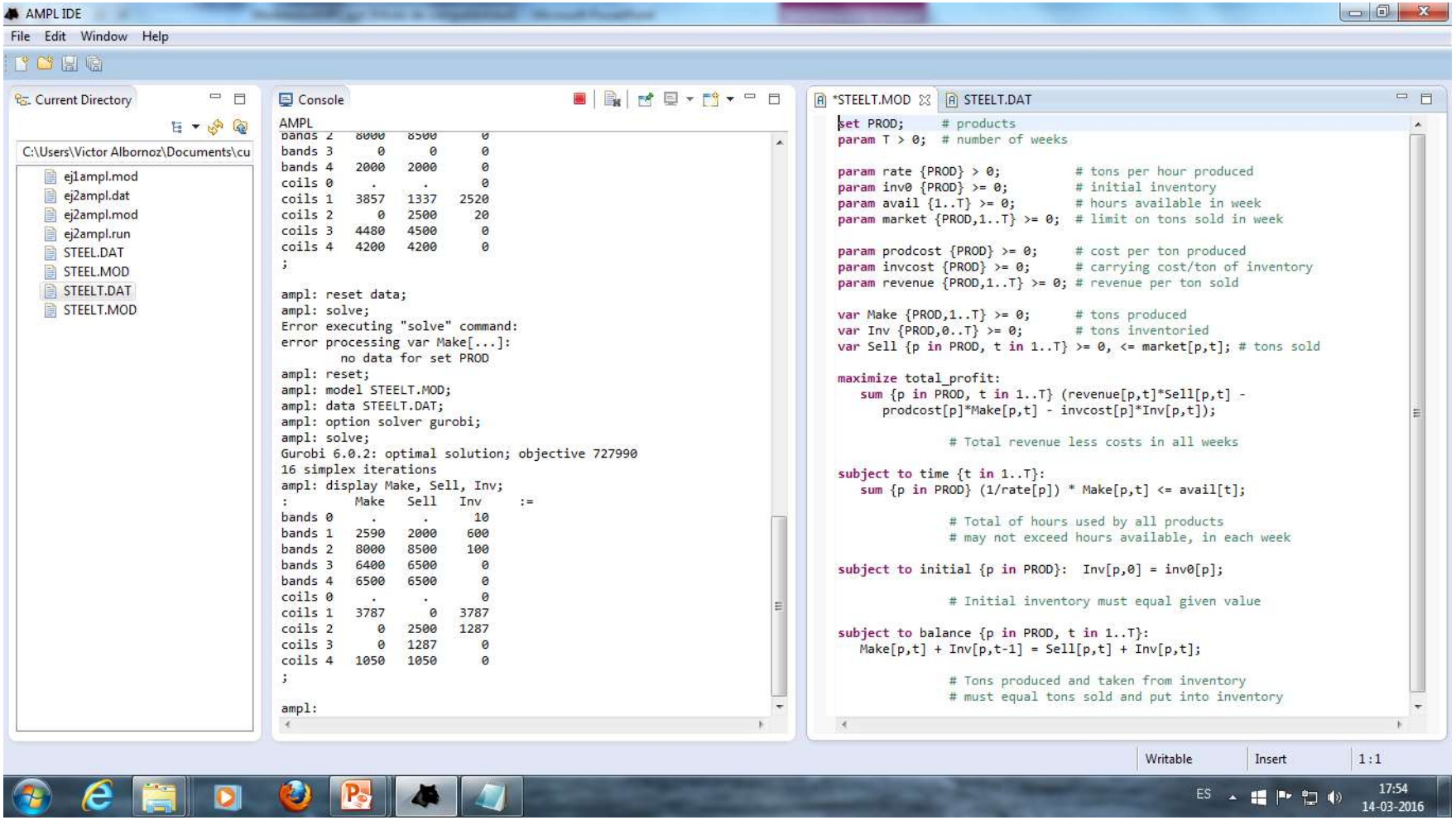
$$X_{pt} + I_{pt-1} = S_{pt} + I_{pt} \qquad p \in P;\ t=1,\ldots,T$$

$$\sum_{p \in P} (1/r_p) X_{pt} \leq av_t \qquad t=1,\ldots,T$$

$$0 \leq S_{pt} \leq d_{pt} \qquad p \in P;\ t=1,\ldots,T$$

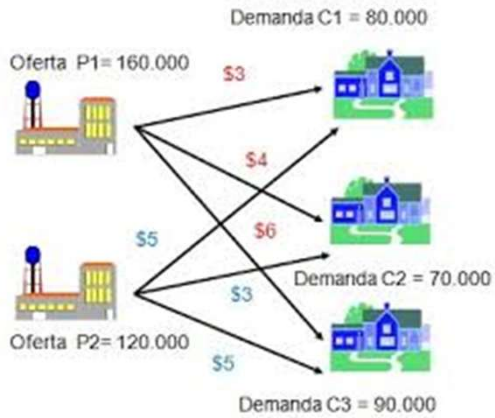
$$I_{pt} \geq 0,\ X_{pt} \geq 0, \qquad p \in P;\ t=1,\ldots,T$$

Si discute a continuación el modelo descrito y su formulación en AMPL asociada a los archivos STEELT.MOD y STEELT.DAT:



Ejemplo 3. *Problema de Transporte.*

Un problema muy interesante en la logística de las operaciones consiste en decidir cuántas unidades trasladar desde ciertos puntos de origen (plantas, ciudades, etc.) a ciertos puntos de destino (centros de distribución, ciudades, etc..) de modo de minimizar los costos de transporte, dada la oferta y demanda en dichos puntos.



Variables de decisión.

$T_{i,j}$: unidades transportadas desde el origen i al destino j

Modelo

Min $\sum_i \sum_j c_{i,j} T_{i,j}$

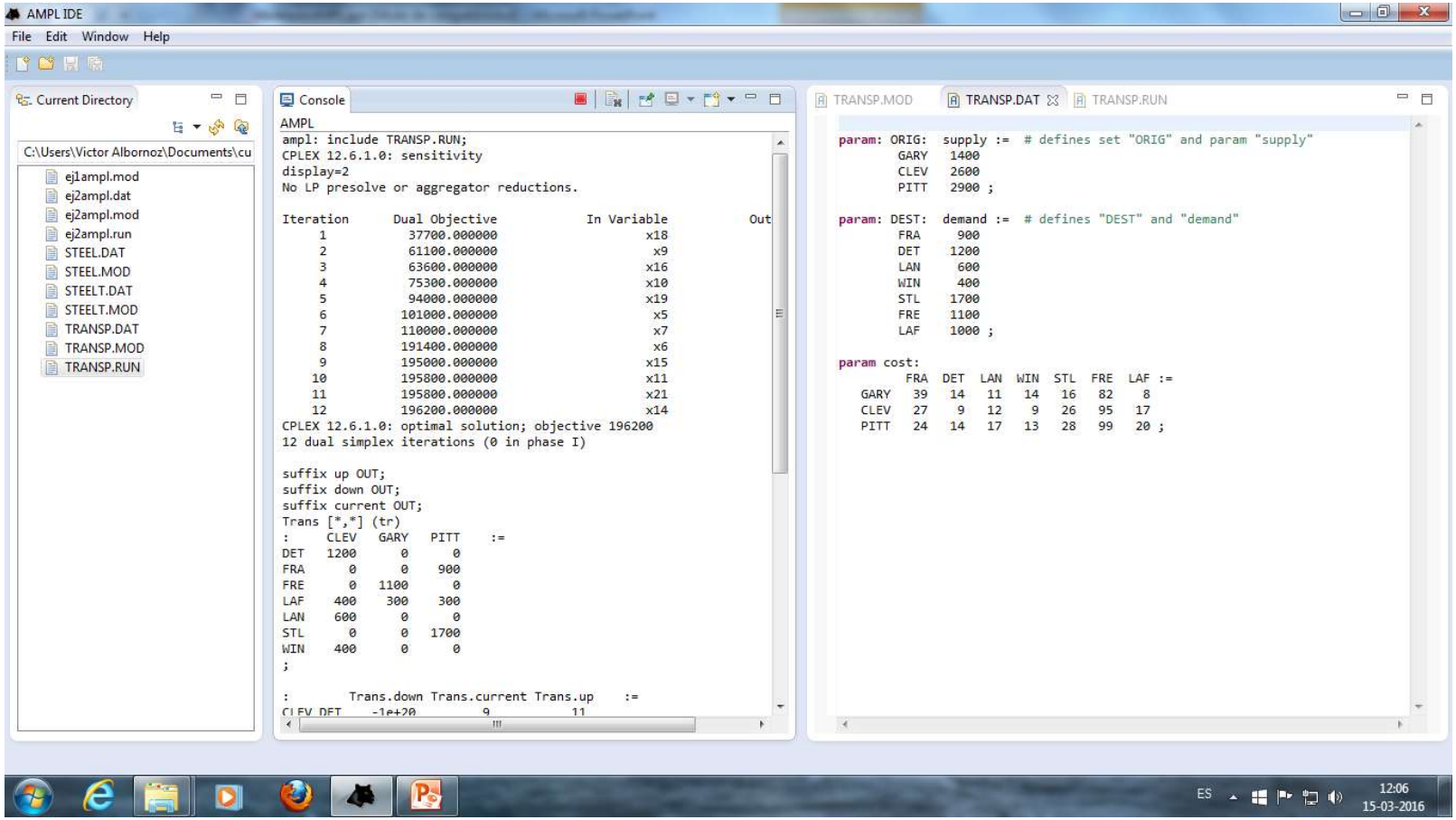
s.a.

$\sum_j T_{i,j} \leq \text{oferta}_i$ para todo origen i=1,…,m

$\sum_i T_{i,j} = \textit{demanda}_j$ para todo destino j=1,…,n

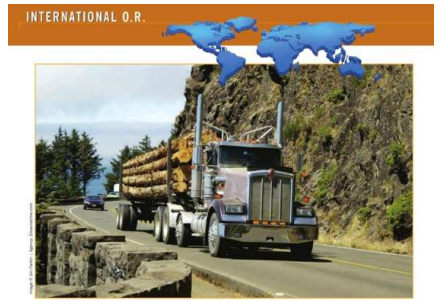
$T_{i,j} \geq 0$ i=1,…,m; j=1,…,n

Se presenta un modelo correspondiente a un problema de transporte como el del ejemplo asociado a los archivos TRANSP.MOD y TRANSP.DAT:

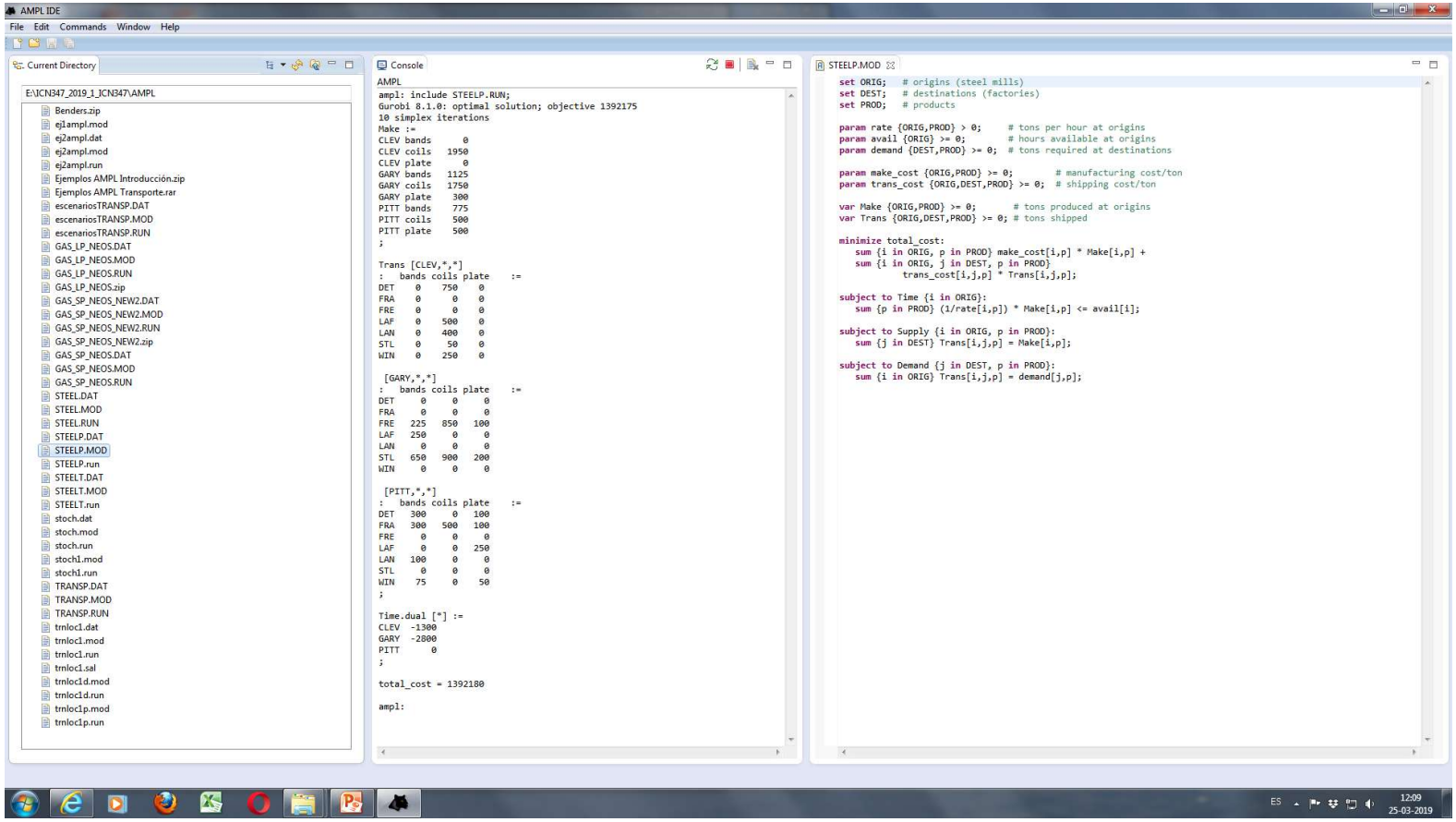


Ejemplo 4. Problema de producción y transporte.

Dado un conjunto de múltiples plantas (orígenes) donde se elaboran múltiples productos, el problema consiste en definir niveles óptimos de producción y despacho para satisfacer la demanda de cada cliente (destino) minimizando el costo total de producción y transporte.



Se presenta a continuación un modelo que representa el problema de producción y transporte en AMPL asociado a los archivos STEELP.MOD y STEELP.DAT.



Ejemplo 5. Problema de localización y transporte.

Asuma que se tiene un conjunto de n clientes, de los cuales el cliente j demanda d_j unidades de un producto determinado. Una compañía desea satisfacer esas demandas desde un cierto conjunto de bodegas elegidas de entre m potenciales lugares donde se instalarán.

Denotamos por c_i los costos fijos asociados a la instalación de la planta i, y t_{ij} el costo de transporte de una unidad desde la bodega i al cliente j.

El problema consiste en decidir cuáles plantas habilitar de modo de satisfacer las demandas (estimadas) al mínimo costo.

Variables de decisión:

y_i = variable binaria que toma el valor 1 si se elabora en la planta i y 0 en caso contrario, con i=1,....,m.

x_{ij} = el número de unidades elaboradas en la planta i para satisfacer el cliente j, con i=1,....,m y j=1,...,n.

Función objetivo:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \quad + \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}$$

Costo de Instalación

Costo de Transporte

Restricciones:

Demanda cliente j=1,…,n: $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

Relacionar variables transporte con las asociadas a la apertura de cada planta i=1,…,m:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M_i \, y_i$$

donde M_i es una constante suficientemente grande.

Las variables además satisfacen: $x_{ij} \geq 0$ e $y_j \in \{0,1\}$.

Si discute a continuación un modelo en AMPL correspondiente al problema descrito de localización y transporte detallado en los archivos trnloc1.mod y trnloc1.dat.