

Teorema de Bolzano

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) \cdot f(b) \leq 0$.

Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

5.2.1. a) Demostrar que $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.

Considero $f(x) = x + 2\cos(x)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

$$f(-\pi) = -\pi + 2(-1) = -\pi - 2 < 0$$

$$f(0) = 0 + 2\cos(0) = 2 > 0$$

Aplico Bolzano con $a = -\pi$ y $b = 0$.

La conclusión es que $c \in [-\pi, 0]$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $c + 2\cos(c) = 0$.

Obs. Podemos aproximar el valor de c .

$$\text{calculo } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

$$\Rightarrow c \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$$\text{Después calculo } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4} + \sqrt{2} > 0$$

$$\Rightarrow c \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \text{ etc.}$$

b) Quiero que la raíz $x \in [n, n+1], n \in \mathbb{Z}$.

a) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ Si $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = 3$$

$$f(-5) = -\cancel{5^5} + \overbrace{5 \cdot 5^4}^{5^5} + 2(-5) + 1 = -9$$

$$f(-4) = -4^5 + 5 \cdot 4^4 + 2(-4) + 1 =$$
$$-4 \cdot 4^4 + 5 \cdot 4^4 - 7 = 4^4 - 7 > 100$$

$\Rightarrow$ existe raíz en $[-5, -4]$ ($n = -5$)
Bolzano

b) $x^5 + x + 1$

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = -1 \Rightarrow \text{hay solución en } [-1, 0]$$

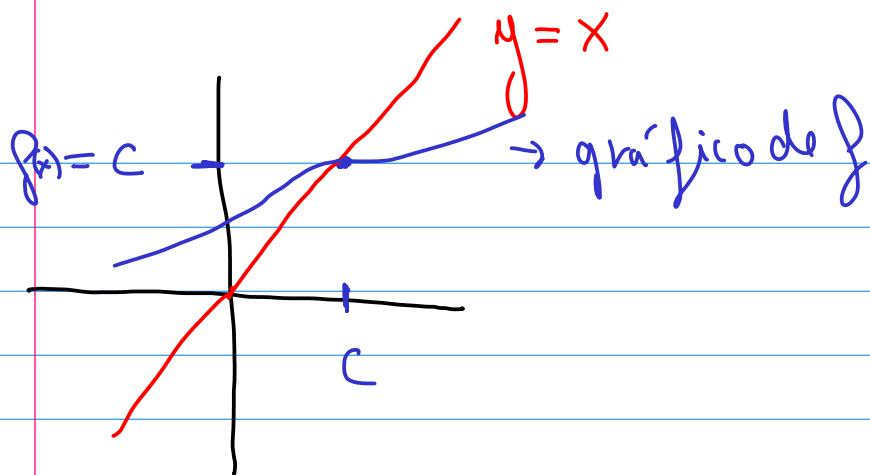
($n = -1$)

c) $x + e^x$

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = -1 + e^{-1} =$$
$$= -1 + \frac{1}{e} < 0$$

$\Rightarrow$ solución en $[-1, 0]$.

5. Def. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalo
 $c \in I$ es un punto fijo si $f(c) = c$.



a) $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua.

Probar que f tiene al menos un punto fijo.

Quiero resolver $f(x) = x$, es lo mismo que $f(x) - x = 0$

Considero $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - x$$

g es continua por ser suma de dos funciones continuas.

$$g(0) = f(0) \in [0, 1]$$

$$g(1) = f(1) - 1 \in [-1, 0]$$

Por Bolzano, existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$, es decir $f(c) = c$.

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua sin puntos fijos

Ejemplo $f(x) = x + 1$, $f(x) = x^2 + x + 1$

$$f(x) = e^x + x$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalo

f está acotada superiormente

$\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in I$, $f(x) \leq K$

$\Leftrightarrow \{f(x) \mid x \in I\}$ está acotado superiormente

$\Downarrow$ f tiene supremo $\sup(f, I) = \sup_{x \in I} f(x)$

$x \in I$ es un máximo de f

$\Leftrightarrow \forall y \in I$, $f(y) \leq f(x)$.

$\Leftrightarrow f(x)$ es un máximo de $\{f(y) \mid y \in I\}$.

si f tiene máximo, f está acotada superiormente

5.3.1. a) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

f está acotada superiormente (supremo = 1)
no hay máximo

0 es mínimo y no hay más
 $\Downarrow$ acotada inferiormente.

b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

no acotada sup $\Rightarrow$ no hay máximo
acotada inf. (inf = 0), no hay mínimo

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$

Los máximos de f son los puntos $x \in \mathbb{R}$
tales que $f(x) = 1$, es decir,

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Mínimos: $\left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Teorema de Weierstrass: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

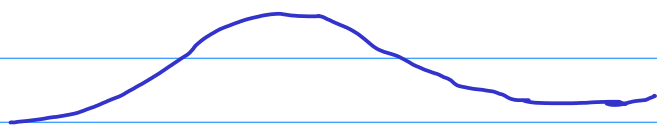
Entonces f tiene mínimo y máximo.

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

a) $a, b \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b,$

Falso

entonces f tiene máximo y mínimo.



$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ no tiene mínimo

b) —, f tiene máximo o mínimo
Falso



$$f(x) = \arctan(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$