

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

Entonces f tiene máximo y mínimo absolutos.

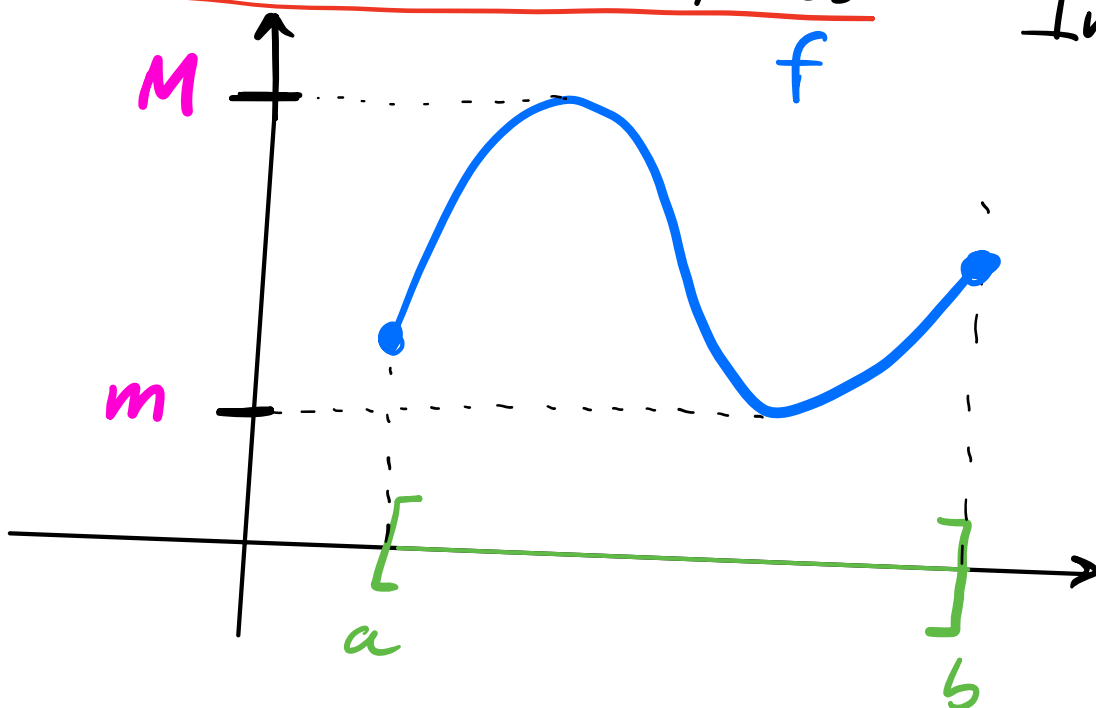
Es decir, $\exists x_0, x_1 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

Definición: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tiene ^{máximo}_(mínimo) absoluto si

$\text{Im}(f) = \{ f(x) : x \in I \}$ tiene ^{máximo}_(mínimo)

Teorema de Weierstrass

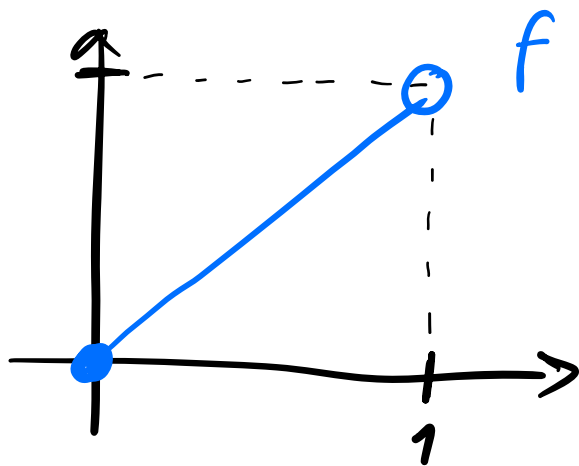


$$\text{Im}(f) = f([a, b]) = [m, M]$$

En el dibujo se ejemplifica el teorema de Weierstrass

NO ejemplo:

- Sea $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x$



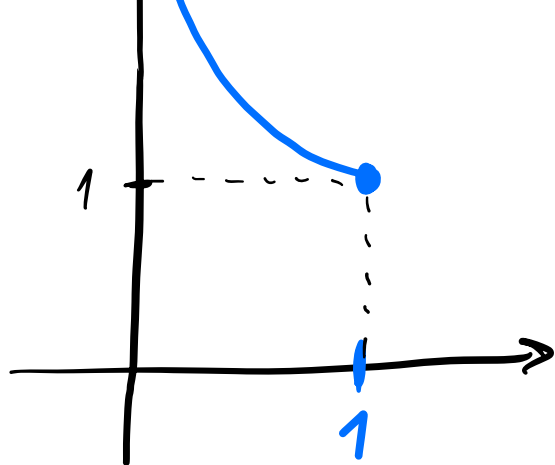
$$\text{Im}(f) = [0, 1)$$

Entonces f tiene
mínimo absoluto pero
no tiene máximo absoluto.

La tesis del teorema de Weierstrass no se cumple porque falla la hipótesis de que el dominio de la función sea un intervalo cerrado.

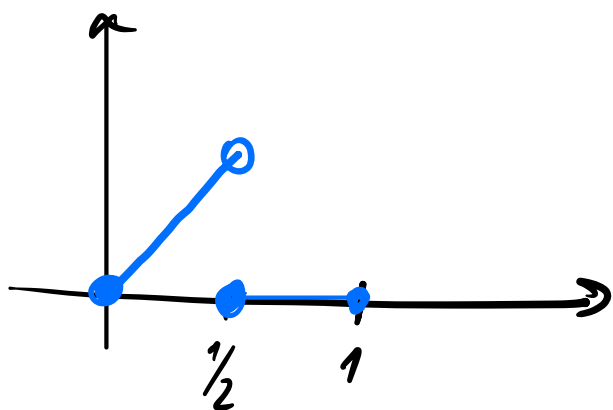
- Sea $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1/x$. $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$

Nuevamente f no tiene máximo absoluto y la hipótesis que



falla es que el dominio de f no es un intervalo cerrado.

- Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

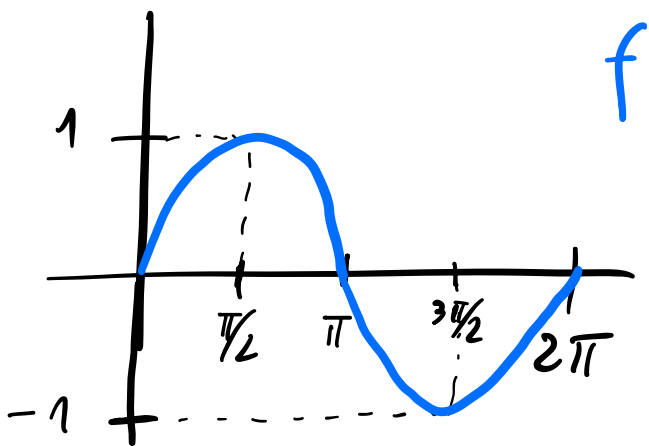
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$


$$\text{Im}(f) = [0, \frac{1}{2})$$

Entonces f no tiene máximo absoluto pero sí tiene mínimo absoluto.

La tesis de Weierstrass falla porque f no es continua.

- $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sin(x)$



$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

Entonces el máximo absoluto de f es 1 y el mínimo absoluto de f es -1.

A partir de ahora, pueden ver en la clase 28 del openfing del 2022.

Proposición: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces f está acotada

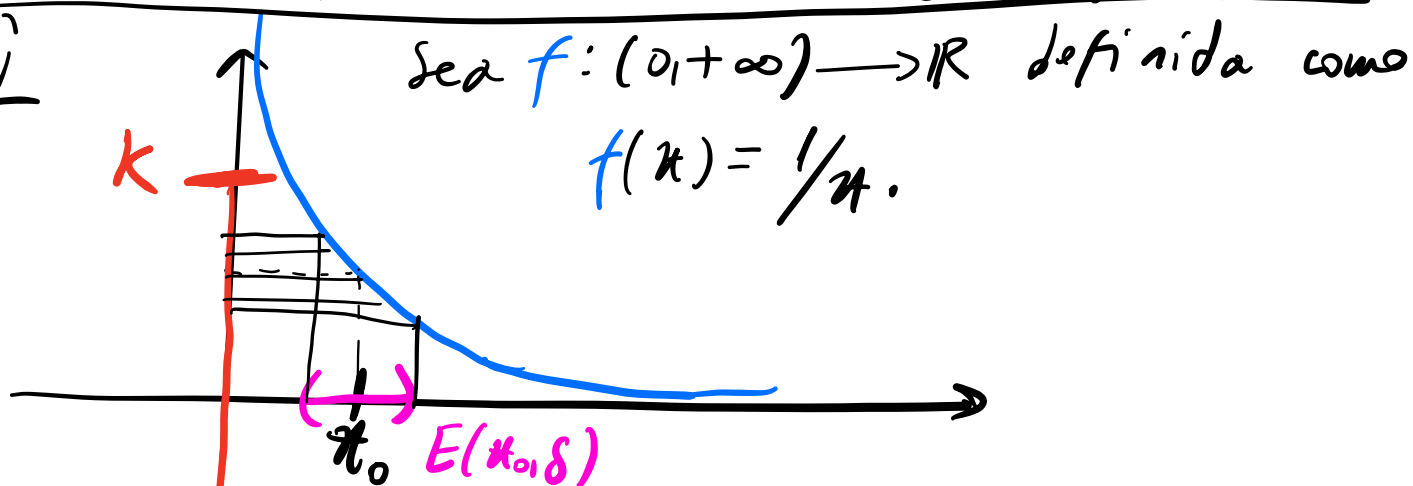
Recordamos: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ está acotada si $\exists k > 0 / |f(x)| \leq k$
 $\forall x \in I$

(es decir si $\text{Im}(f)$ es un conjunto acotado)

Definición: Decimos que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ está localmente acotada en x_0 si $\exists k > 0, \exists \delta > 0 /$

$$|f(x)| \leq k \quad \forall x \in E(x_0, \delta) \cap I$$

Ej



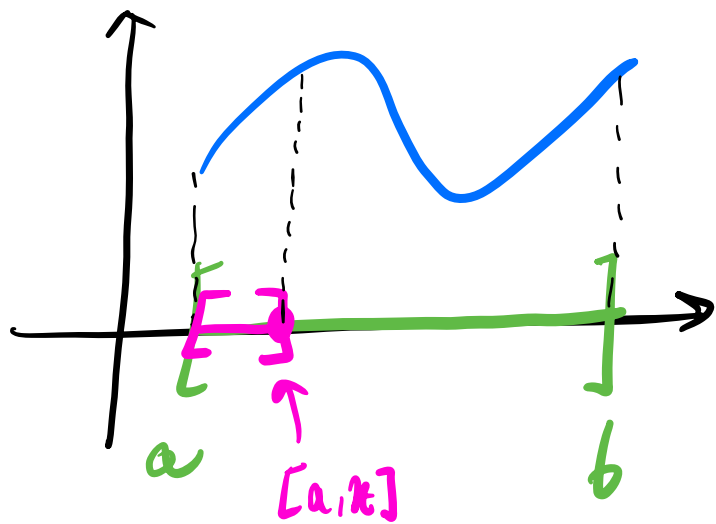
f no está acotada en $(0, +\infty)$ porque $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$ que no está acotado. Sin embargo, f localmente acotada en $x_0 \quad \forall x_0 \in (0, +\infty)$

Lema: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in I$. Entonces f está localmente acotada en x_0 .

Demstración de la proposición:

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Queremos ver que $\exists k > 0 \quad / \quad |f(x)| \leq k \quad \forall x \in [a, b]$

Para eso vamos a considerar el conjunto $C = \{x \in [a, b] / f \text{ está acotada en } [a, x]\}$



Queremos ver que $b \in C$.

Observar que $C \subseteq [a, b]$ y por lo tanto b es una cota superior de C .

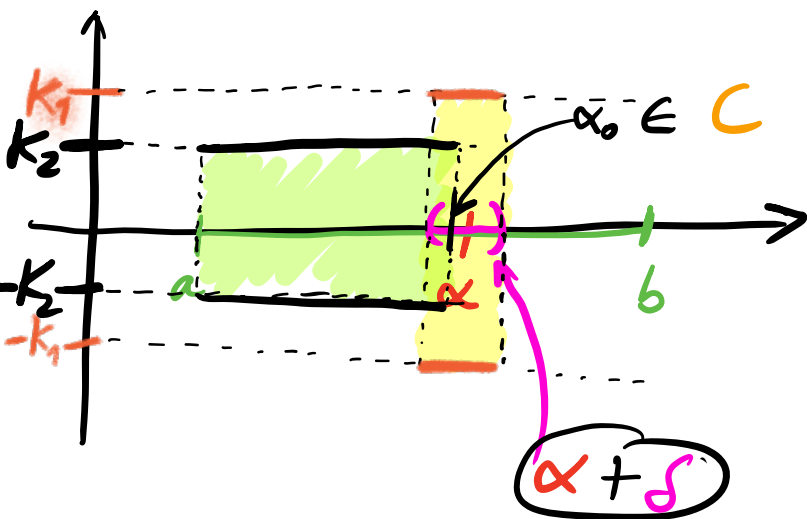
Por el axioma de completitud existe $\alpha = \sup(C)$

Queremos ver que $\alpha = b$.

Supongamos por absurdo que $\alpha \neq b$.

en ese caso, como $\alpha = \sup(C)$ y b es cota superior de C , entonces $\alpha < b$.

que $\alpha < b$.



Por un lado, como f es continua en α ,
 Por el lema anterior, f está localmente
 acotada en α , es decir:

$$\exists k_1 > 0, \exists \delta > 0 / |f(x)| \leq k_1 \quad \forall x \in E(\alpha, \delta)$$

Como $\alpha = \sup(C)$, por la propiedad
 fundamental del supremo, $\exists \alpha_0 \in C /$
 $\alpha - \delta < \alpha_0 \leq \alpha$.

Como $\alpha_0 \in C$, la función f está

acotada en $[a, \alpha_0]$, es decir
 $\exists k_2 > 0 / |f(x)| \leq k_2 \quad \forall x \in [a, \alpha_0]$

Entonces, si $x \in [a, \alpha_0] \cup E(\alpha, \delta)$
 $\Rightarrow |f(x)| \leq \max \{k_1, k_2\}$

es decir, si $x \in [a, \alpha + \delta)$
 $\Rightarrow |f(x)| \leq \max \{k_1, k_2\}$

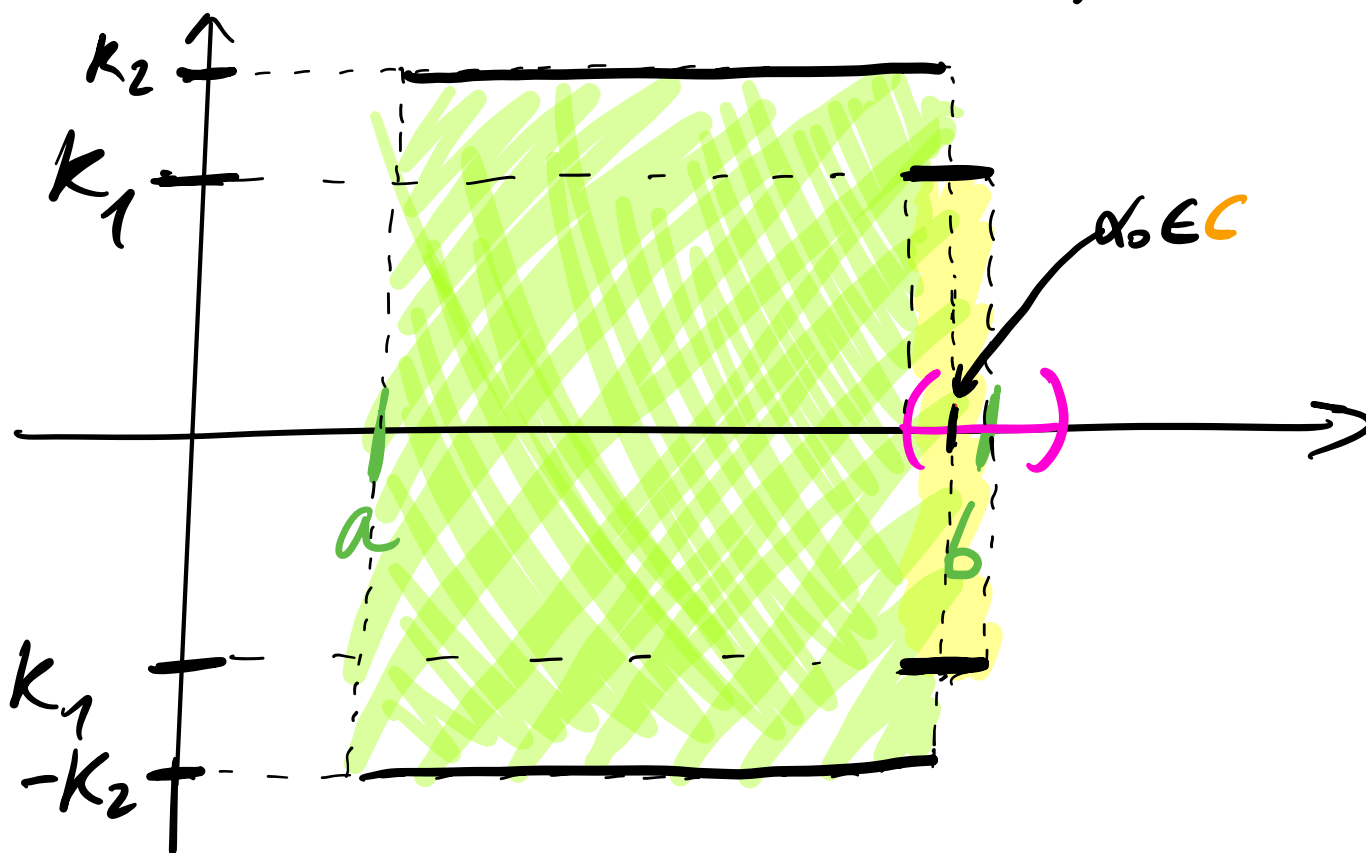
Pero entonces, si $x \in [a, \alpha + \delta/2]$
 $\Rightarrow |f(x)| \leq \max \{k_1, k_2\} \Rightarrow$

$$\alpha + \delta/2 \in C$$

lo cual es absurdo porque $\alpha = \sup(C)$

Entonces $\alpha = b$.

Veamos ahora que $\alpha \in C$



① Por el Lema f está
localmente acotada en b ,
es decir, $\exists k_1 > 0, \exists \delta > 0$ /

$$|f(x)| \leq K_1 \quad \forall x \in E(b, \delta) \cap [a, b]$$

② Como $b = \alpha = \sup(C)$, la propiedad fundamental del supremo nos dice que

$$\exists \alpha_0 \in C \quad / \quad \alpha - \delta < \alpha_0 \leq \alpha.$$

③ Entonces, como $\alpha_0 \in C$, $\exists K_2 > 0 /$

$$|f(x)| \leq K_2 \quad \forall x \in [a, \alpha_0]$$

Por lo tanto, razonando igual que antes, concluimos que

$$|f(x)| \leq \max \{k_1, k_2\}$$

$$\forall x \in [a, \alpha_0] \cup E(b, \delta)$$

$\Rightarrow$ como $[a, b] \subseteq [a, \alpha_0] \cup E(b, \delta)$
concluimos que f está acotada
en $[a, b]$.