

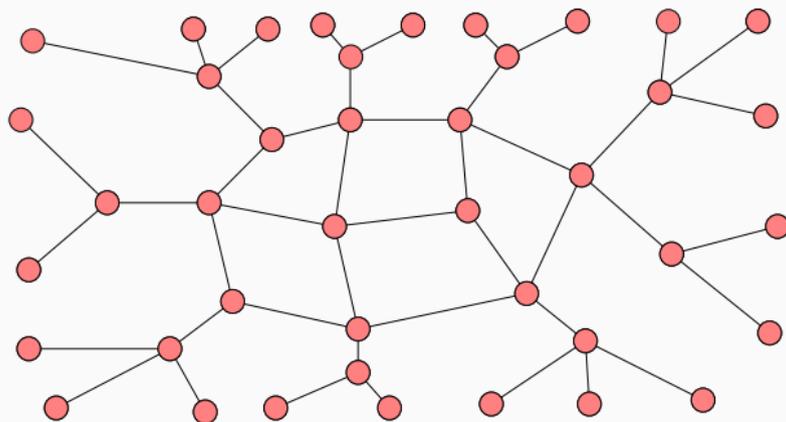
Modelo Estático de Redes

Cálculo Exacto, Cotas y Simplificaciones

Leslie Murray

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

Abril, 2025

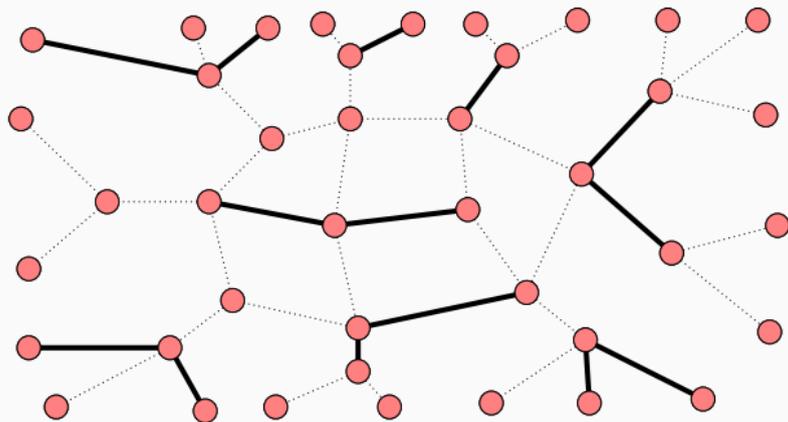


- Grafo no dirigido: $G(V, E)$
- $V = \{\text{conjunto de nodos}\}$, $|V| = n$, $E = \{\text{conjunto de enlaces}\}$, $|E| = m$

Modelo de Red

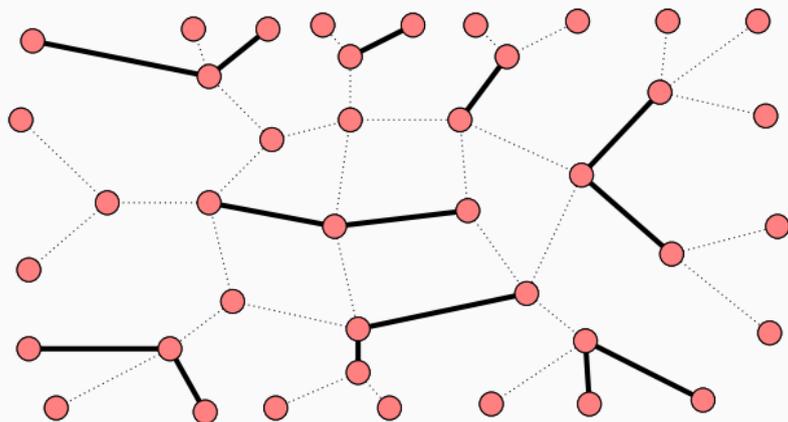
nodo: genera y procesa información que recibe y transmite a través de los enlaces

enlace: permite el paso de información entre los nodos de sus extremos



Vamos a trabajar sobre un modelo simple en el cual:

- Los nodos son “perfectos” (no fallan).
- Los enlaces pueden estar en uno de dos estados posibles.



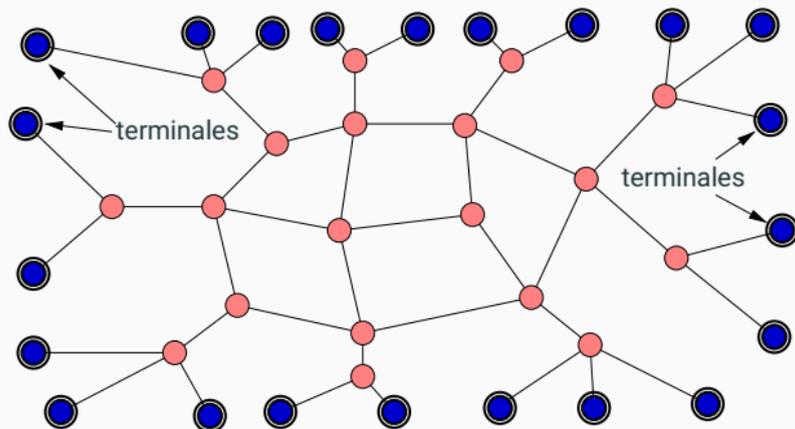
Vamos a trabajar sobre un modelo simple en el cual:

- Los nodos son “perfectos” (no fallan).
- Los enlaces pueden estar en uno de dos estados posibles.

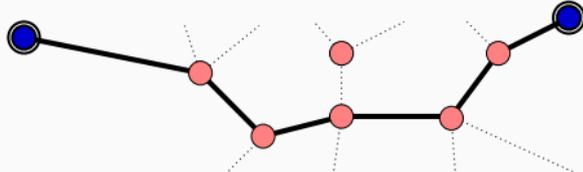
Estados de un enlace

fallado: equivale a retirado del grafo

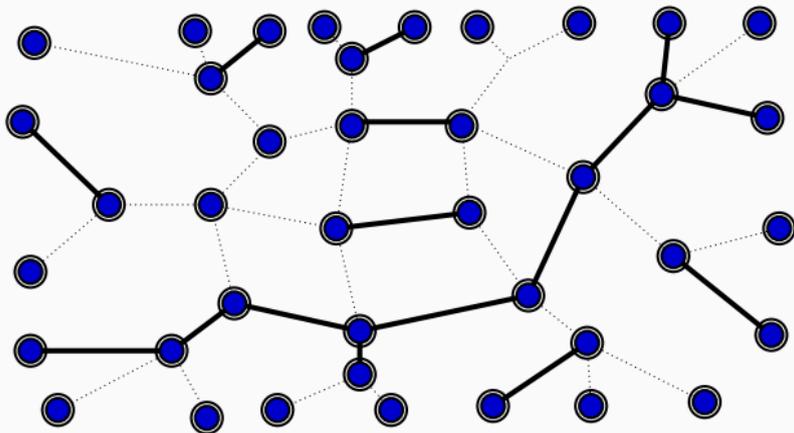
sano u operativo: indica una conexión perfecta entre los nodos de sus extremos



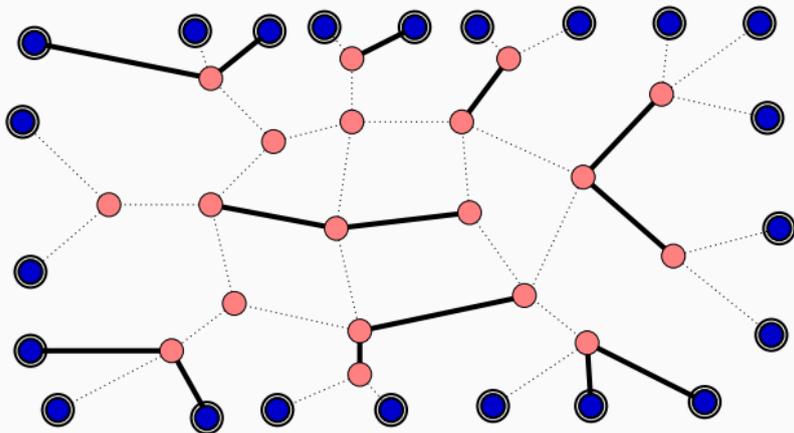
- Garantizar la conexión entre nodos terminales (conectividad).



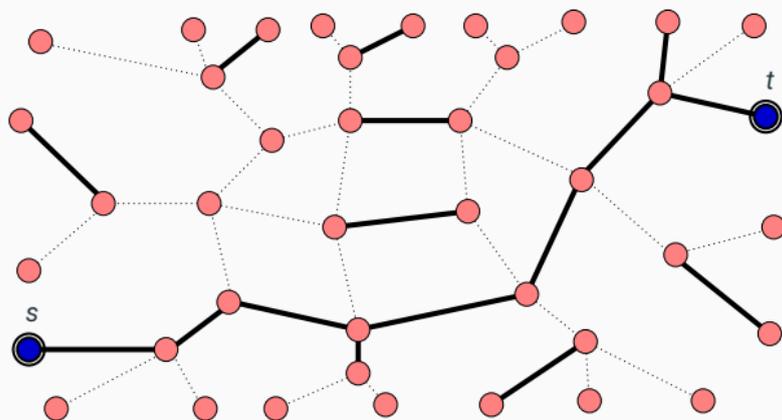
- Para el análisis vamos a considerar tres formas posibles de conectividad.



Si la red está formada sólo por terminales, **la red se considera operativa si existe al menos un camino formado por enlaces operativos que los conecte a todos.**



Si la red está formada sólo por K terminales, **la red se considera operativa si existe al menos un camino formado por enlaces operativos que conecte los K terminales.**



Si la red está formada sólo por 2 terminales, s y t , **la red se considera operativa si existe al menos un camino formado por enlaces operativos entre s y t .**

$s = source$ (origen, fuente)

$t = terminal$ (objetivo, blanco)

La elección del tipo de conectividad no tiene un peso importante frente al problema a resolver ni modifica sustancialmente las formas de resolverlo.

- Los enlaces de la red se modelan mediante variables x_i , $i = 1, 2, \dots, m$.
- Cada componente del vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, es una variable indicatriz del estado de operación del enlace asociado:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{-ésimo enlace está } \textit{operativo} \\ 0 & \text{si el } i\text{-ésimo enlace está } \textit{fallado} \end{cases}$$

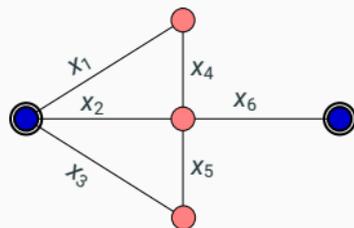
- La red —en forma global— también puede encontrarse en uno de dos estados de operación: garantizando la conexión entre nodos terminales, o no.
- El estado de operación de la red depende del estado de los enlaces.
- La *función de estructura*, $\phi(\mathbf{x})$, es una variable indicatriz del estado de operación de la red:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ garantiza la conexión entre los nodos terminales }^{(*)} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

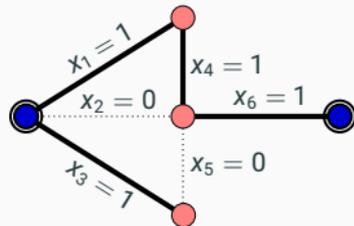
Función de estructura

$\phi(\mathbf{x})$ es la indicatriz de que la red cumple con el cometido para el cual fue diseñada.

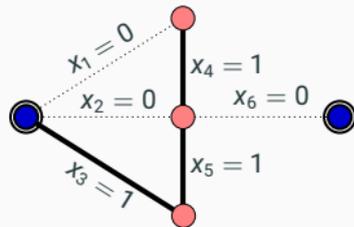
^(*) Ya sea para conectividad s-t, K-terminales o todos-con-todos.



$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$



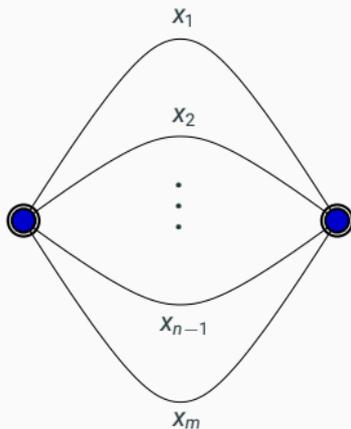
$$\phi(1, 0, 1, 1, 0, 1) = 1$$



$$\phi(0, 0, 1, 1, 1, 0) = 0$$

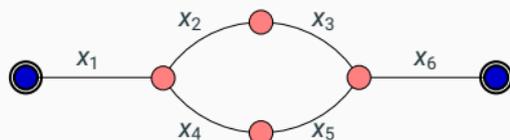


$$\phi(\mathbf{x}) = \min(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m x_i$$



$$\phi(\mathbf{x}) = \max(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - x_i)$$

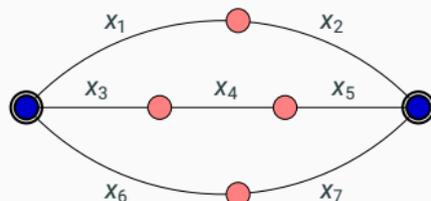
EJEMPLO 1:



$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \min(x_1, \max(\min(x_2, x_3), \min(x_4, x_5)), x_6) \\ &= x_1 \max(\min(x_2, x_3), \min(x_4, x_5)) x_6 = x_1 \max((x_2 x_3), (x_4 x_5)) x_6 \\ &= x_1 (x_2 x_3 + x_4 x_5 - x_2 x_3 x_4 x_5) x_6 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2:



$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \max(x_1 x_2, x_3 x_4 x_5, x_6 x_7) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_3 x_4 x_5)(1 - x_6 x_7) \\ &= x_1 x_2 + x_3 x_4 x_5 + x_6 x_7 - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 - x_1 x_2 x_6 x_7 - \\ &\quad x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \end{aligned}$$

Supongamos ahora que los enlaces están *operativos* o *fallados* en forma aleatoria.

- El i -ésimo enlace está *operativo* con probabilidad r_i y *fallado* con probabilidad $q_i = 1 - r_i$.
- El estado de la red es un vector de v.a. de Bernoulli, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}\{X_i = 1\} = r_i & \text{confiabilidad individual del } i\text{-ésimo enlace} \\ \mathbb{P}\{X_i = 0\} = q_i = 1 - r_i & \text{anti-confiabilidad individual del } i\text{-ésimo enlace} \end{cases}$$

- La *función de estructura* también es una v.a. de Bernoulli,

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{X} \text{ garantiza la conexión entre los nodos terminales} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Basados en $\phi(\mathbf{X})$ se define ζ , la confiabilidad de la red:

$$\zeta = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} = \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$$

Confiabilidad de la red, ζ

Es la probabilidad de que la red cumpla con el cometido para el cual fue diseñada.

De aquí en más las v.a. X_i , $i = 1, \dots, m$, se considerarán mutuamente independientes.

Nota: para una v.a. B de Bernoulli, $\mathbb{E}\{B\} = 1 \times \mathbb{P}\{B = 1\} + 0 \times \mathbb{P}\{B = 0\} = \mathbb{P}\{B = 1\}$.

Supongamos ahora que los enlaces están *operativos* o *fallados* en forma aleatoria.

- El i -ésimo enlace está *operativo* con probabilidad r_i y *fallado* con probabilidad $q_i = 1 - r_i$.
- El estado de la red es un vector de v.a. de Bernoulli, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}\{X_i = 1\} = r_i & \text{confiabilidad individual del } i\text{-ésimo enlace} \\ \mathbb{P}\{X_i = 0\} = q_i = 1 - r_i & \text{anti-confiabilidad individual del } i\text{-ésimo enlace} \end{cases}$$

- La *función de estructura* también es una v.a. de Bernoulli,

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{X} \text{ garantiza la conexión entre los nodos terminales} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Basados en $\phi(\mathbf{X})$ se define $1 - \zeta$, la anti-confiabilidad de la red:

$$1 - \zeta = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 0\} = 1 - \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$$

Anti-confiabilidad de la red, $1 - \zeta$

Es la probabilidad de que la red no cumpla con el cometido para el cual fue diseñada.

De aquí en más las v.a. X_i , $i = 1, \dots, m$, se considerarán mutuamente independientes.

Nota: en futuras discusiones se evaluará la conveniencia de trabajar con $1 - \zeta$ en lugar de ζ .

Hay diversas formas de encontrar (algunas en forma exacta, otras en forma aproximada) el valor de ζ :

- **Cálculo Exacto (C.E.).** Determinar el valor de ζ mediante una expresión matemática.
- **Determinación de Cotas.** Encontrar valores ζ_L y ζ_U tales que

$$\zeta_L \leq \zeta \leq \zeta_U.$$

- Útil si es más sencillo el cálculo de ζ_L y ζ_U que el cálculo exacto de ζ .
- Se pueden evaluar las cotas mediante indicadores de precisión relativa:

$$AR_L = \frac{\zeta - \zeta_L}{\zeta} \quad AR_U = \frac{\zeta_U - \zeta}{\zeta} \quad AR = \frac{\zeta_U - \zeta_L}{\zeta}$$

- **Simplificaciones.** Eliminar nodos y enlaces sin que eso modifique el valor de ζ , pero haciendo más sencillo tanto el cálculo exacto, como la determinación de cotas o la estimación.
- **Estimación.** Encontrar un valor $\hat{\zeta}$ (estimador), cercano a ζ .
 - Útil si es más sencillo el cálculo de $\hat{\zeta}$ que el cálculo exacto de ζ
 - Se puede evaluar la calidad de $\hat{\zeta}$ mediante un indicador de error relativo:

$$ER = \frac{|\hat{\zeta} - \zeta|}{\zeta} \quad (\text{vamos a trabajar con otras formas de error relativo})$$

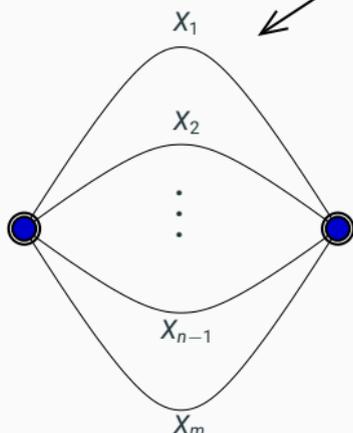
Cálculo Exacto

SERIE 

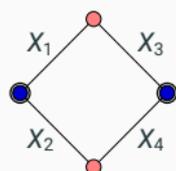


$$\begin{aligned} \zeta &= \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\} = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{\text{todos los } X_i = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge \dots \wedge X_m = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \mathbb{P}\{X_2 = 1\} \dots \mathbb{P}\{X_m = 1\} \\ &= \prod_{i=1}^m r_i \end{aligned}$$

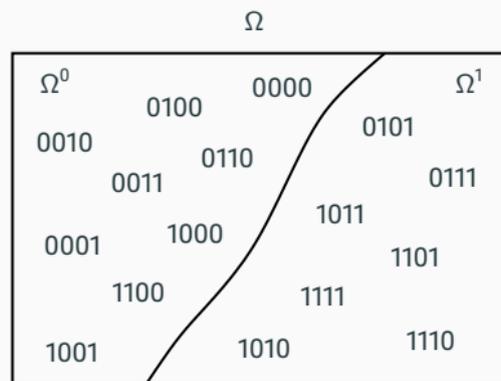
PARALELO 



$$\begin{aligned} \zeta &= \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\} = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{\text{al menos un } X_i = 1\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{todos los } X_i = 0\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\{X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge \dots \wedge X_m = 0\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\{X_1 = 0\} \mathbb{P}\{X_2 = 0\} \dots \mathbb{P}\{X_m = 0\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^m (1 - r_i) \end{aligned}$$

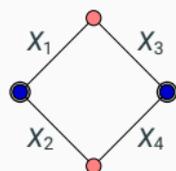


$\mathbf{X} = X_1X_2X_3X_4 \rightarrow$ EJEMPLOS: $\mathbf{X}_1 = 0000$, $\mathbf{X}_2 = 0001$, ...

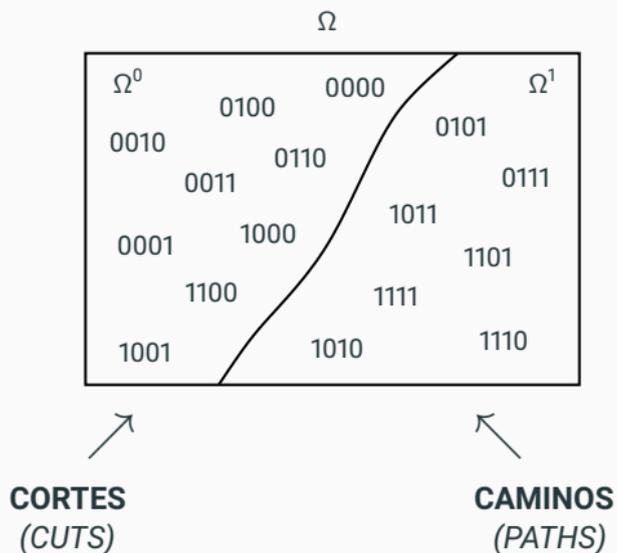


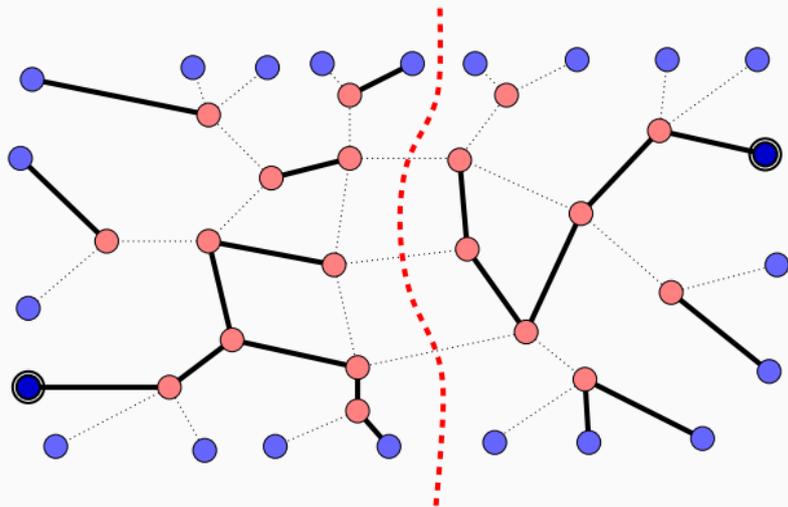
Ω^1 : subespacio de configuraciones que permiten la conexión entre los terminales.

Ω^0 : subespacio de configuraciones que no permiten la conexión entre los terminales.

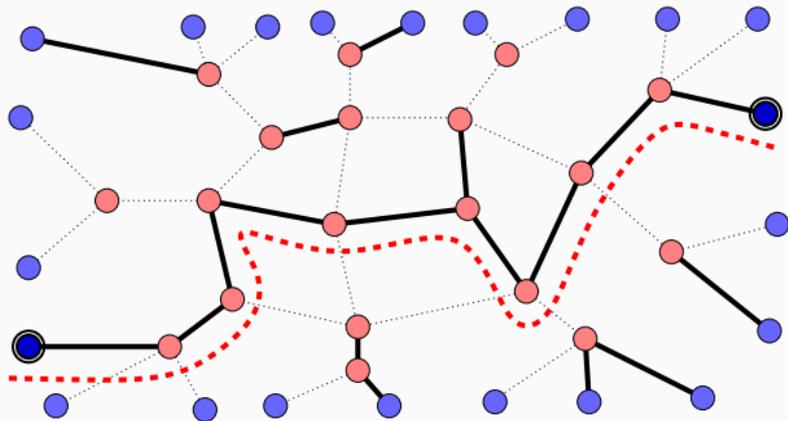


$\mathbf{X} = X_1 X_2 X_3 X_4 \rightarrow$ EJEMPLOS: $\mathbf{X}_1 = 0000$, $\mathbf{X}_2 = 0001$, ...

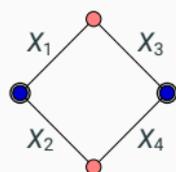




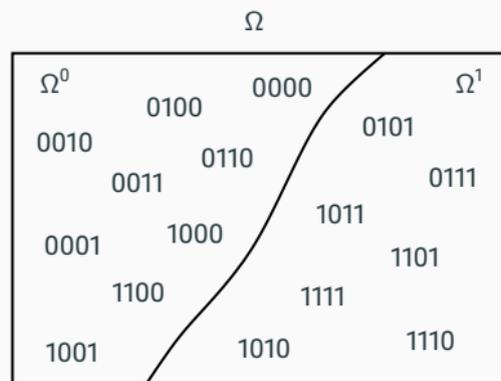
CORTE



CAMINO



$\mathbf{X} = X_1 X_2 X_3 X_4 \rightarrow$ EJEMPLOS: $\mathbf{X}_1 = 0000$, $\mathbf{X}_2 = 0001$, ...



ζ es la suma de las probabilidades de todas las configuraciones de Ω^1 .

$1 - \zeta$ es la suma de las probabilidades de todas las configuraciones de Ω^0 .

- Sea $\Omega = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{2^m}\}$, el conjunto de todos los estados de la red.
- Los eventos $\{\mathbf{X} = \mathbf{X}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 2^m$ son mutuamente excluyentes, por lo que:

$$\sum_{i=1}^{2^m} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{X}_i\} = 1$$

- Siendo $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^0$, donde:

$$\begin{cases} \Omega^1 = \{\text{estados que garantizan la conectividad entre terminales}\} \\ \Omega^0 = \{\text{los restantes}\} \end{cases}$$

- Claramente:

$$\zeta = \sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega^1} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}_i\} \qquad 1 - \zeta = \sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega^0} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}_i\}$$

$$\mathbf{X} = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6$$

$$\mathbf{x} = 110101$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \times \mathbb{P}\{X_2 = 1\} \times \mathbb{P}\{X_3 = 0\} \times \mathbb{P}\{X_4 = 1\} \times \mathbb{P}\{X_5 = 0\} \times \mathbb{P}\{X_6 = 1\} \\ &= r_1 \times r_2 \times q_3 \times r_4 \times q_5 \times r_6\end{aligned}$$

Si todos los enlaces son iguales: $r_i = r \forall i$

$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\} = r^4 \times q^2 = r^4 \times (1 - r)^2$$

- Un vector \mathbf{X} es un *camino* si $\phi(\mathbf{X}) = 1$.
- Sea $C_k = \{i : X_i = 1 \wedge X_i \in \mathbf{X}_k, \text{ siendo } \mathbf{X}_k \text{ un camino}\}$.
- La probabilidad de que el estado de la red sea \mathbf{X}_k es:

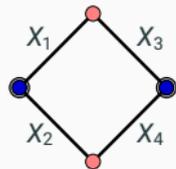
$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{X}_k\} = \prod_{\substack{j=1 \\ i \in C_k}}^m r_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin C_k}}^m (1 - r_j) = \prod_{i \in C_k} r_i \prod_{j \notin C_k} q_j$$

- Siendo $\Omega^1 = \{\mathbf{X} : \phi(\mathbf{X}) = 1\}$, es decir, el conjunto de todos los *caminos* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{|\Omega^1|}$, y $C_1, C_2, \dots, C_{|\Omega^1|}$ los correspondientes conjuntos de índices, $|\Omega^1| \leq 2^m$,

$$\zeta = \sum_{k=1}^{|\Omega^1|} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{X}_k\} = \sum_{k=1}^{|\Omega^1|} \left(\prod_{i \in C_k} r_i \prod_{j \notin C_k} q_j \right)$$

Es necesario generar los 2^m estados, ver cuáles son caminos, y sumar las probabilidades de aquellos que lo sean.

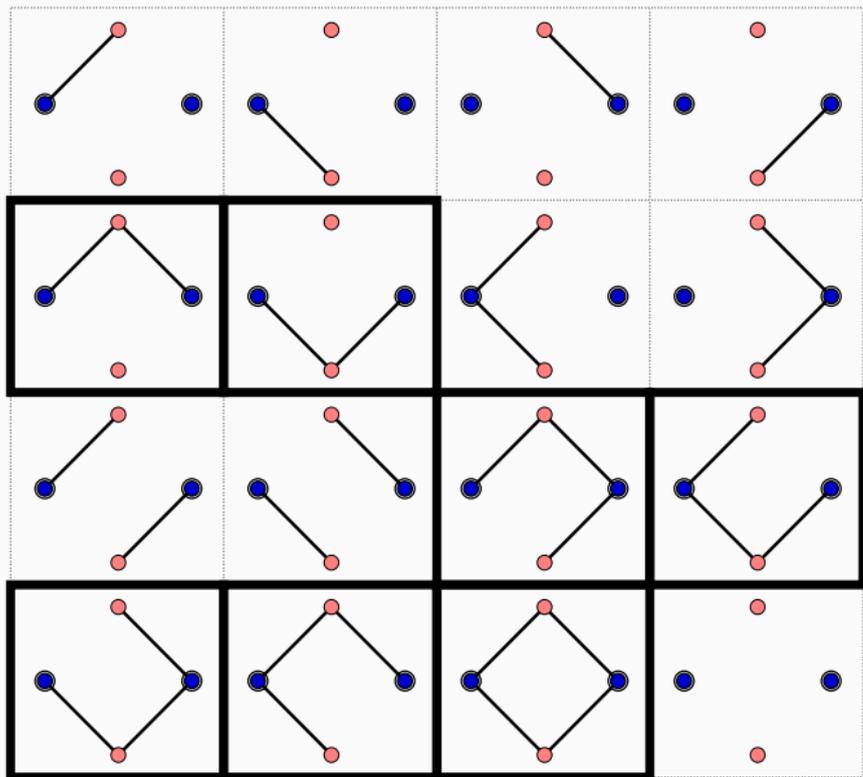
EJEMPLO 3:



$$\mathbb{P}\{X_i = 1\} = r$$

$$\mathbb{P}\{X_i = 0\} = q$$

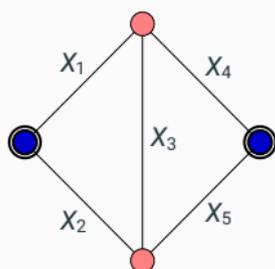
$$i = 1, 2, 3, 4$$



$$\begin{aligned}\zeta &= rrqq + rrqq + rrrq + rrrq + rrrq + rrrq + rrrr \\ &= 2r^2q^2 + 4r^3q + r^4 \\ &= 2r^2(1-r)^2 + 4r^3(1-r) + r^4 \\ &= 2r^2(1-2r+r^2) + 4r^3(1-r) + r^4 \\ &= 2r^2 - r^4\end{aligned}$$



EJEMPLO 4:

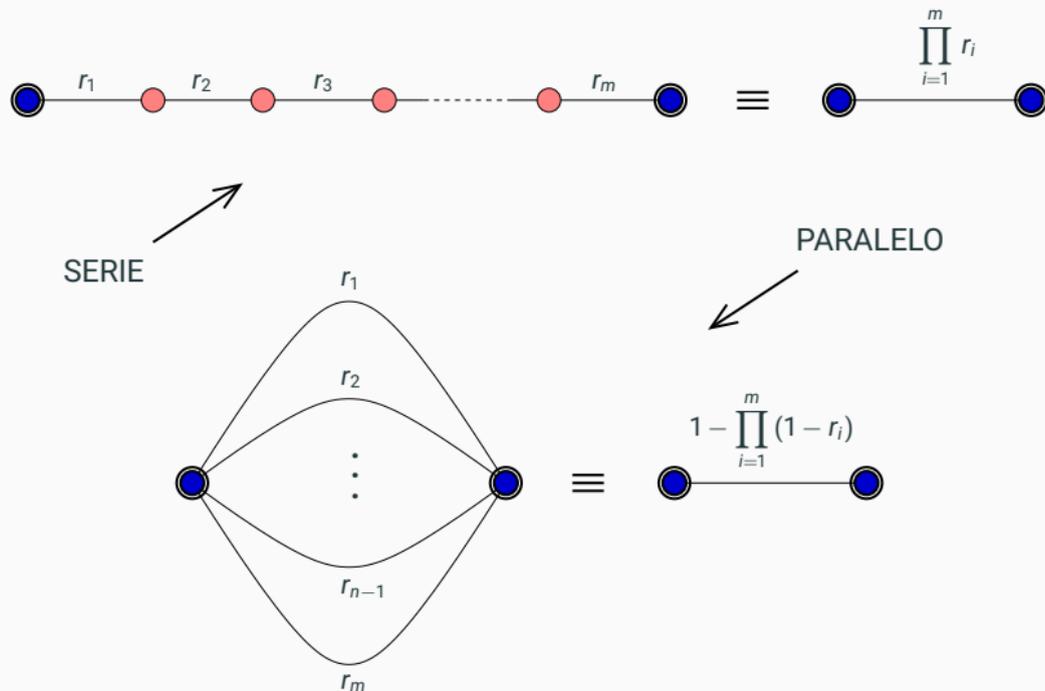


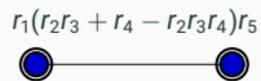
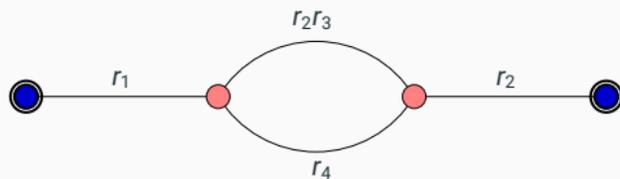
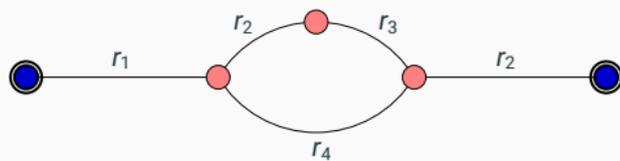
La confiabilidad ζ es la suma de las probabilidades indicadas en la columna derecha de la tabla.

C_k	$\mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}_k\}$
12345	$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5$
1234	$r_1 r_2 r_3 r_4 q_5$
1235	$r_1 r_2 r_3 q_4 r_5$
1245	$r_1 r_2 q_3 r_4 r_5$
124	$r_1 r_2 q_3 r_4 q_5$
125	$r_1 r_2 q_3 q_4 r_5$
1345	$r_1 q_2 r_3 r_4 r_5$
134	$r_1 q_2 r_3 r_4 q_5$
135	$r_1 q_2 r_3 q_4 r_5$
145	$r_1 q_2 q_3 r_4 r_5$
14	$r_1 q_2 q_3 r_4 q_5$
2345	$q_1 r_2 r_3 r_4 r_5$
234	$q_1 r_2 r_3 r_4 q_5$
235	$q_1 r_2 r_3 q_4 r_5$
245	$q_1 r_2 q_3 r_4 r_5$
25	$q_1 r_2 q_3 q_4 r_5$

Simplificaciones

Sin que esto implique resolver la determinación de ζ , algunas redes pueden reducirse (eliminando nodos y enlaces), en algunos casos hasta su resolución total.





References

-  C. J. Colbourn. ***The Combinatorics of Network Reliability***. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1987. ISBN: 0195049209.
-  Ilya B. Gertsbakh and Yoseph Shpungin. ***Models of Network Reliability: Analysis, Combinatorics, and Monte Carlo***. 1st ed. CRC Press, Inc., 2009. ISBN: 1439817413, 9781439817414.
-  S.M. Ross. ***Introduction to Probability Models***. 10th ed. Elsevier Science, 2006. ISBN: 9780123756879.