CAMBIO DE VARIABLE $x = \frac{1}{u}$

Sea $f:(0,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ función.

Entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} f\left(\frac{1}{u}\right)$

INDETERMINACIÓN

Recordamos:
$\log(u^\alpha) = \alpha \cdot \log(u)$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0^+} \, \underbrace{\log(x)}_{\to -\infty} \underset{\substack{CV \\ x=\frac{1}{u}}}{=} \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{1}{u}\right) \boxed{\log\left(\frac{1}{u}\right)} =$$

$$\log\left(\frac{1}{u}\right) = \log(u^{-1}) = (-1) \cdot \log(u)$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \frac{-\log(u)}{u} = 0$$

Por órdenes de infinitos

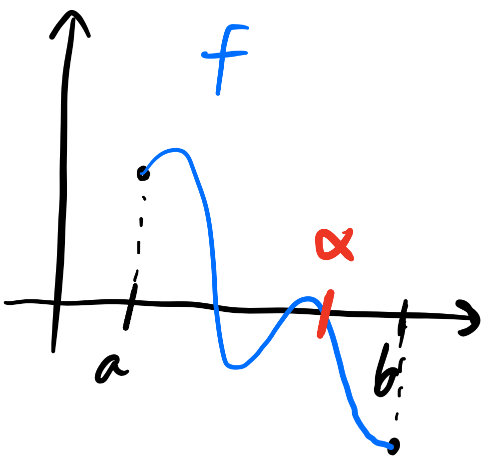
TEOREMA DE BOLZANO

Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supongamos además que $f(a) \cdot f(b) < 0$

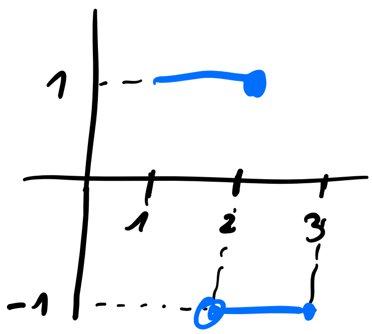
$f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo

Entonces existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha) = 0$



<u>Observaciones</u>: Si f no es continua no tiene porqué existir una raiz.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1,2] \\ -1 & \text{si } x \in (2,3] \end{cases}$$



← NO CUMPLE LA TESIS DE BOLZANO

FALLA LA HIPÓTESIS DE CONTINUIDAD DE f

<u>Lema de conservación del signo</u>:

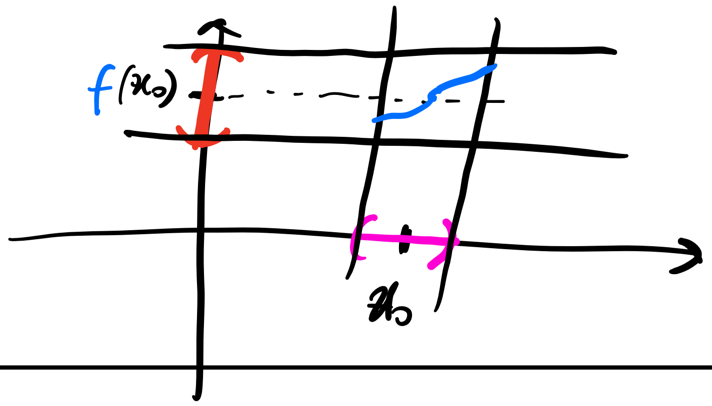
Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>continua</u> y $x_0 \in I$.

Supongamos que $f(x_0) > 0$

$(f(x_0) < 0)$

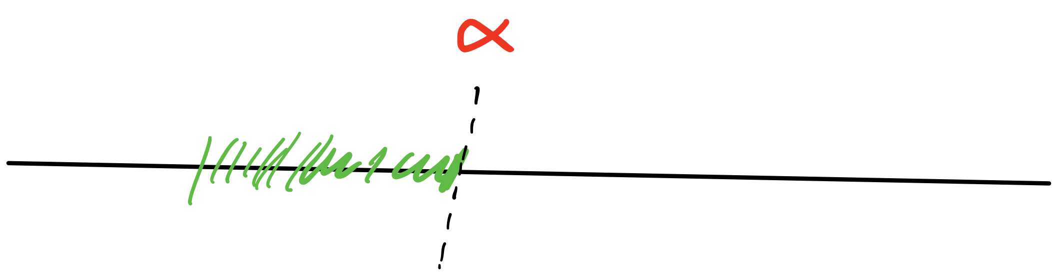
$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, f(x) > 0 \quad \forall x \in E(x_0, \delta) \cap I$

$(f(x) < 0)$



Recordar: Propiedad fundamental del supremo.

Si $\alpha = \sup A$ entonces, $\forall \delta > 0$ se tiene que $\exists\, x \in A \cap (\alpha - \delta, \alpha]$



Demostración del Teorema de Bolzano:

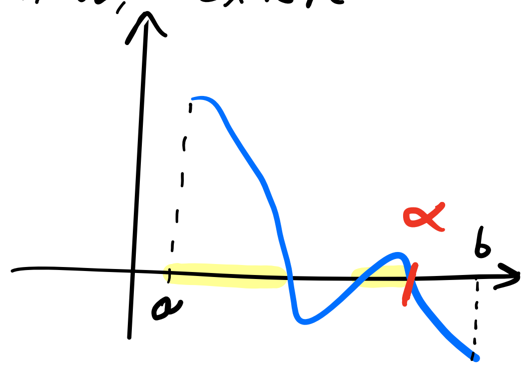
Supongamos que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, la prueba en el otro caso es análoga.

Consideremos $A = \{x \in [a,b] \,/\, f(x) > 0\}$

Observar que $A \subseteq [a,b] \Rightarrow b$ cota superior de A

Entonces, por el axioma de completitud, existe

$$\alpha = \sup A$$



Vamos a probar que $f(\alpha) = 0$.

Hay tres opciones:

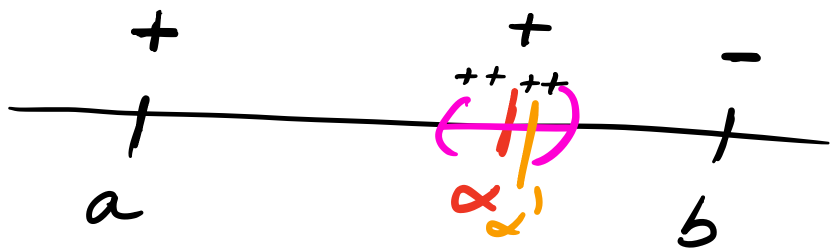
I) $f(\alpha) > 0$
II) $f(\alpha) < 0$
III) $f(\alpha) = 0$

Veremos que I) y II) no pueden ocurrir, lo que implica que se cumple III).

Veamos que I) no puede pasar.

Asumamos que $f(\alpha) > 0$ (y vamos a llegar a una contradicción)

Como $f(\alpha) > 0$ y $f(b) < 0$ concluimos que $\alpha \neq b$



Por el lema de conservación del signo (Podemos aplicarlo porque f es continua)

$\exists\, \delta > 0 /\ f(x) > 0\ \forall x \in E(\alpha, \delta) \cap [a,b]$

Como $\alpha < b$, podemos encontrar $\alpha' > \alpha$ tal que

$$\alpha' \in E(\alpha, \delta) \cap [a,b]$$

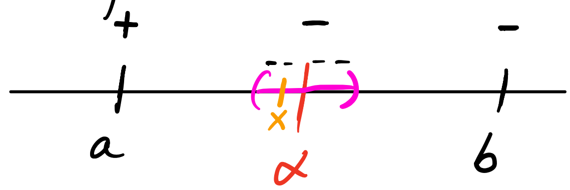
Pero entonces $f(\alpha') > 0 \Rightarrow \alpha' \in A$

Esto es absurdo porque $\alpha' \in A$ y $\alpha' > \alpha$ contradiciendo que α es cota superior de A

Por lo tanto concluimos que $f(\alpha)$ no puede ser mayor que 0.

Veamos ahora que II) no puede pasar:

Asumamos ahora que $f(\alpha) < 0$.



Primero, observar que $f(\alpha) < 0$ y $f(a) > 0 \Rightarrow \alpha \neq a$

Por el Lema de conservación del signo, $\exists\, \delta > 0 /$

$$\boxed{f(x) < 0 \quad \forall x \in E(\alpha, \delta) \cap [a,b]}$$

Por otro lado, por la propiedad fundamental del supremo tenemos que $\exists\, x \in A \cap (\alpha - \delta, \alpha]$

Pero esto es una contradicción ya que; por un lado, por L. C. Signo, $f(x) < 0$ pero, por otro lado, como $x \in A$, se tiene que $f(x) > 0$.

Esto es una contradicción, por lo que II) no puede pasar, y solo que la opción III) es decir que $f(\alpha) = 0$

$\blacksquare$