Tabla para límite de la suma

$\lim g$ \ $\lim f$	$k_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$k_2 \in \mathbb{R}$	$k_1 + k_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

ind

Tabla para límite del producto

$\lim g$ \ $\lim f$	$k_1 > 0$	$k_1 < 0$	$k = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$k_2 > 0$	$k_1 k_2$	$k_1 k_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$k_2 < 0$	$k_1 k_2$	$k_1 k_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$k = 0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

indetermi-naciones

Def: Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Decimos que f es equivalente a g cuando $x \longrightarrow x_0$ si:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1}$$

"f es

x_0 puede ser: x_0^+, x_0^-, $\pm\infty$

equivalente a g"

Proposición: Sean $f, g, h : I \to \mathbb{R}$

Supongamos además que $f \sim g$ cuando $x \to x_0$

Entonces:

(I) $$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x)$$

(II) $$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)}$$

Idea de la prueba para (I):

PORQUE $f \sim g$ cuando $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x) \cdot \underbrace{\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}}_{=1} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \cancel{g(x)} \cdot h(x) \frac{f(x)}{\cancel{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot h(x)$$

Ejercicio: Hacer la prueba en el caso (II)

Ejemplos:

$x \sim \operatorname{sen}(x)$ cuando $x \to 0$

$\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ cuando $x \to 0$

$\log(1+x) \sim x$ cuando $x \to 0$

Proposición: Sea $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_n \neq 0$

Entonces $\boxed{P(x) \sim a_n x^n}$ cuando $x \to \pm\infty$

Dem: Tenemos que ver que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = 1$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$= a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{a_n x^n}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\dots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{\cancel{a_n x^n}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n x}}_{0} + \dots + \underbrace{\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}}_{0} + \underbrace{\frac{a_0}{a_n x^n}}_{0} = 1$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{7x^3+3x-1}^{\to+\infty}}{\underbrace{4x^3+2x^2}_{+\infty}} =$$

equivalente

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^3}{4x^3+2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^3}{4x^3} = \frac{7}{4}$$

equivalente

Ejemplo de lo que NO hay que hacer

$$\lim \left(\cancel{x^2+3x+1}\right) - \left(x^2\right) =$$

$x \to +\infty$ equiv.

$$\cancel{\lim_{x\to+\infty} (x^2) - (x^2) = 0} \leftarrow \text{MAL}$$

De hecho: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^2+3x+1)-x^2 =$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x+1 = +\infty \leftarrow \checkmark$$

MORALEJA: NO PUEDE SUSTITUIR SUMANDOS POR EQUIVALENTES

Proposición: Si $f \sim g$ cuando $x \to x_0$ y $\alpha > 0$, entonces $f^\alpha \sim g^\alpha$ cuando $x \to x_0$

Ej:

Por la Proposición.

$$\sqrt{x^4+7x+1} = (x^4+7x+1)^{\frac{1}{2}} \sim (x^4)^{\frac{1}{2}} = x^2$$

SUSTITUIMOS POR EQUIVALENTE

Órdenes de infinitos e infinitésimos

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ decimos que f es un infinitésimo en x_0

Def: Sean f, g tales que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

Decimos que f es un infinitésimo de mayor orden que g en x_0 si:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

"f tiende a 0 más rápido que g

cuando $x \to x_0$"

Ejemplo: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ son infinitésimos en 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} \overset{x}{=} \lim_{x\to 0} x = 0$$

Entonces g es un infinitésimo de mayor orden que f, en 0.

En este caso también podemos decir que f es un infinitésimo de menor orden que g en 0.

Def: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$

Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ decimos que f es un infinito de mayor orden que g en x_0.

Ej: Si $m > n > 0$

x^m tiene mayor orden de infinito que x^n en $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} x^{\overbrace{m-n}^{>0}} = +\infty \quad \checkmark$$

Esto se puede escribir, si $m > n$

$$\operatorname{ord}(x^m) > \operatorname{ord}(x^n) \quad \text{en } +\infty$$

Vamos a asumir: Si $\alpha > 0$

$ord(\log(x)) < ord(x^\alpha)$ en $+\infty$

es decir: $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\log(x)} = +\infty$$

(o lo que es lo mismo: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0^+$)

Spoiler: si $\alpha > 0$

$ord(x^\alpha) < ord(e^x)$ cuando $x \to +\infty$

Proposición: si $ord(f) < ord(g)$ en x_0

$\Longrightarrow$ $f + g \sim g$ en x_0

Dem: $$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x)}{g(x)} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} + 1 = 1$$

$\downarrow$ 0 $\Longleftarrow$ porque $\mathrm{ord}(f) < \mathrm{ord}(g)$ en x_0

Ejemplo:

$$\underbrace{x}_{g} + \underbrace{\log(x)}_{f} \sim \underbrace{x}_{g}$$

cuando $x \to +\infty$

Ejemplo:

Calcular $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + \log(x)}{x + 3\log(x)}$

$2x^2 + \log(x) \to +\infty$, $x + 3\log(x) \to +\infty$

- Como $\mathrm{ord}(\log(x)) < \mathrm{ord}(2x^2)$ en $+\infty$

$2x^2 + \log(x) \sim 2x^2$ en $+\infty$

- del mismo modo, $x + 3\log(x) \sim x$ en $+\infty$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + \log(x)}{x + 3\log(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = +\infty$$