PRÁCTICO 11

Grafos III: Planitud y Coloración (Secciones 11.4 y 11.6)

ALGUNAS DEFINICIONES Y RESULTADOS ÚTILES:

- Inmersión plana: representación del grafo en el plano de forma de que dos aristas distintas no se cortan (salvo en los vértices en el caso de ser adyacentes).
- Grafo plano: grafo que admite una inmersión plana.
- En toda inmersión plana de un grafo plano la suma de los grados de las regiones es el doble de la cantidad de aristas (incluyendo la región infinita).
- Región infinita: es la región no acotada determinada por una inmersión plana de un grafo finito.
- La fórmula de Euler afirma que en todo grafo plano con v vértices, e aristas, r regiones y κ componentes conexas, se cumple que $v - e + r = \kappa + 1$.W
- Sea G un grafo sin vértices de grado 2, decimos que G' es homeomorfo a G si este puede obtenerse a partir de G via subdivisiones elementales (informalmente, agregando vértices en medio de las aristas).
- Teorema de Kuratowski: un grafo es no plano si y sólo si tiene un subgrafo que es homeomorfo a $K_{3,3}$ o a K_5.

Ejercicio 1. Dibujar una inmersión plana para cada uno de los grafos cuyos conjuntos de vértices y aristas se indican a continuación:

(a) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 4\}$;

(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 5, i - j \text{ impar}\}$;

(c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}$.

(d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{1, 7\}\}$.

Ejercicio 2. Para cada una de las inmersiones planas de los grafos del ejercicio anterior hallar el grado de cada una de las regiones y comprobar que su suma es igual a $2|E(G)|$.

Ejercicio 3. Sea G un grafo plano con 8 vértices, que admite una inmersión plana que determina 4 regiones con grados 3, 3, 4, y 8, respectivamente (la región de grado 8 corresponde a la región infinita).

(a) Determinar la cantidad de aristas de G.

(b) Determinar la cantidad de componentes conexas de G.

(c) Mostrar que dicho grafo G existe.

Ejercicio 4. Probar que $K_{3,3}$ y K_5 no son grafos planos sin usar el Teorema de Kuratowski.

Ejercicio 5. Determine cuáles de los grafos de la Figura 8 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

Ejercicio 6. Demostrar que en todo grafo plano $e \leq 3v - 6$, donde e y v denotan la cantidad de aristas y de vértices, respectivamente. Concluya que todo grafo plano tiene algún vértice de grado 5 o menor.

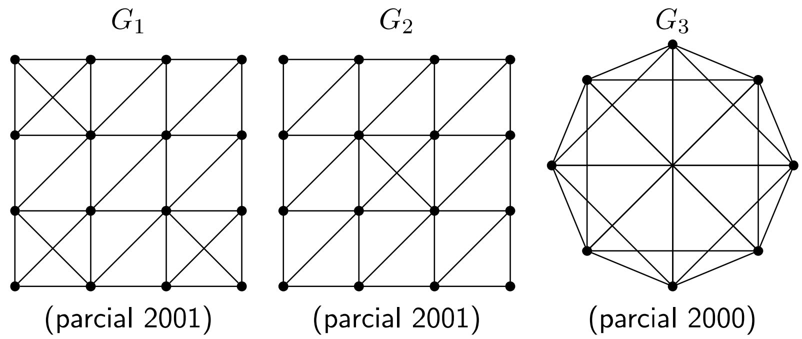

Figura 8

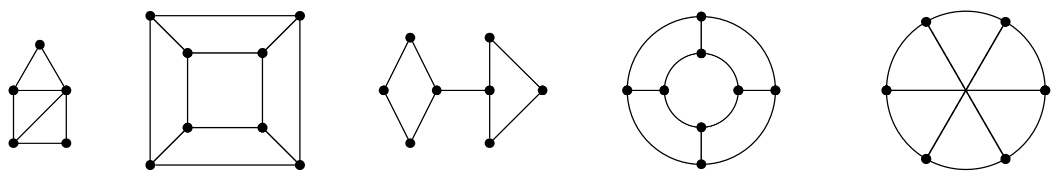

Figura 9

Ejercicio 7. Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores.

Ejercicio 8. Encontrar el número cromático de cada uno de los grafos presentados en la Figura 9.

Ejercicio 9. Hallar el polinomio cromático de C_n, K_n, P_n, $K_{2,n}$ y K_5 menos una arista. Deducir el número cromático de cada grafo y la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

Ejercicio 10. Sea G un árbol con el menos 2 vértices. Hallar el polinomio cromático y el número cromático de G.

Ejercicio 11. Demostrar que para todo grafo simple G se cumple que $\chi(G) \leq 2$ si y sólo si G no tiene ciclos impares.

Ejercicio 12. Sea G un grafo y $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)}\{gr(v)\}$.

(a) Demostrar que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(b) Dar un ejemplo de grafo que cumpla con la igualdad.