

Recordamos que si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, $a \in I$
y definimos $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Entonces F es continua.

Ejemplo: la función $\log: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

definida como $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ es continua

LÍMITES LATERALES

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = L^\pm$$

Def: Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ función y
 $a \in I$. Decimos que f tiene

límite L cuando x tiende a a^+ si
(a^-)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 /$$

$$f(x) \in E(L, \varepsilon) \quad \forall x \in (a, a + \delta_\varepsilon) \\ (\forall x \in (a - \delta_\varepsilon, a))$$

Obs :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \boxed{\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \end{aligned}}$$

Decimos que f es continua por derecha
(izquierda)

$$\text{en } a \text{ si } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ (a^-)$$

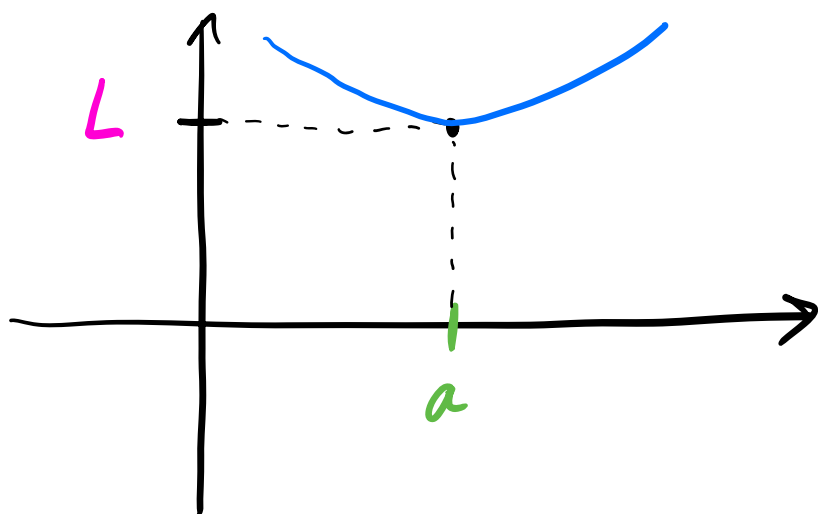
Entonces: f es continua en $a \iff$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Decimos que f tiene límite L^+ en a

si: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 /$

$$f(x) \in (L, L + \varepsilon) \forall x \in E^+(a, \delta_\varepsilon)$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L^+$$

"hay 9 definiciones de límites laterales"

Ejercicio clásico:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

¿Para que valores de a la función f es continua?

Como $g(x) = x$ es continua:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2$$

porque a la izquierda de 2
 g & f coinciden

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$$

De la misma manera, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 + a$

Para que f sea continua en 2

debe cumplirse que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

|| || ||
2 4+a 2

Entonces, se debe cumplir

$$4 + a = 2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

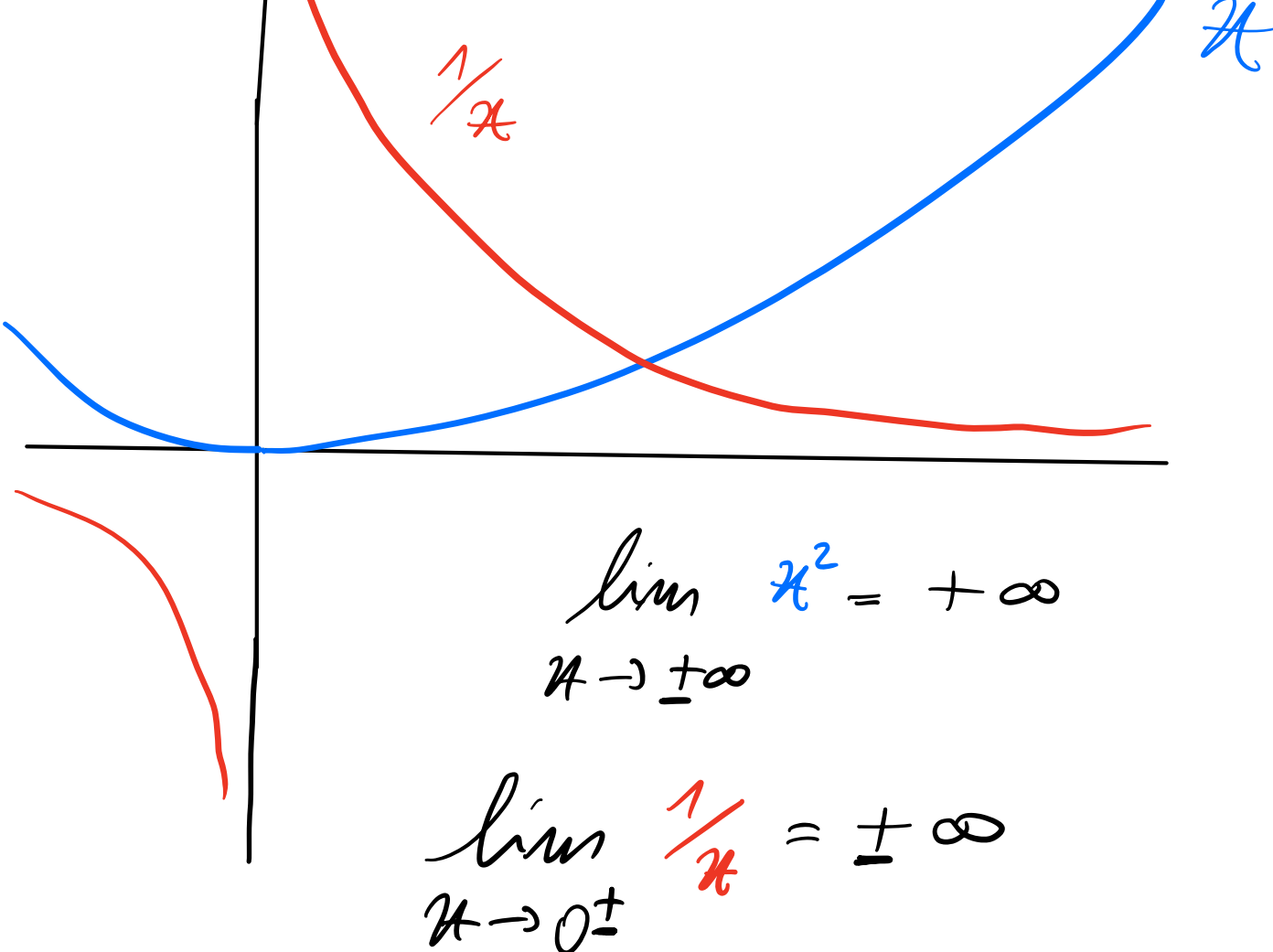
Entonces, f es continua $\Leftrightarrow a = -2$

LÍMITES INFINITOS

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \boxed{\pm\infty}$$



1. 2



Def: Decimos que f tiene límite
 $+\infty$ en $+\infty$ si: $\forall k \in \mathbb{R}, \exists M_k \in \mathbb{R} /$

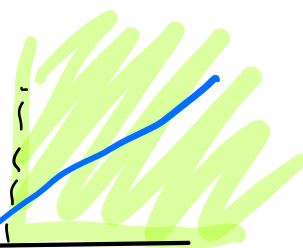
$$f(x) \in (k, +\infty) \quad \forall x \in (M_k, +\infty)$$

$$f(x) > k$$

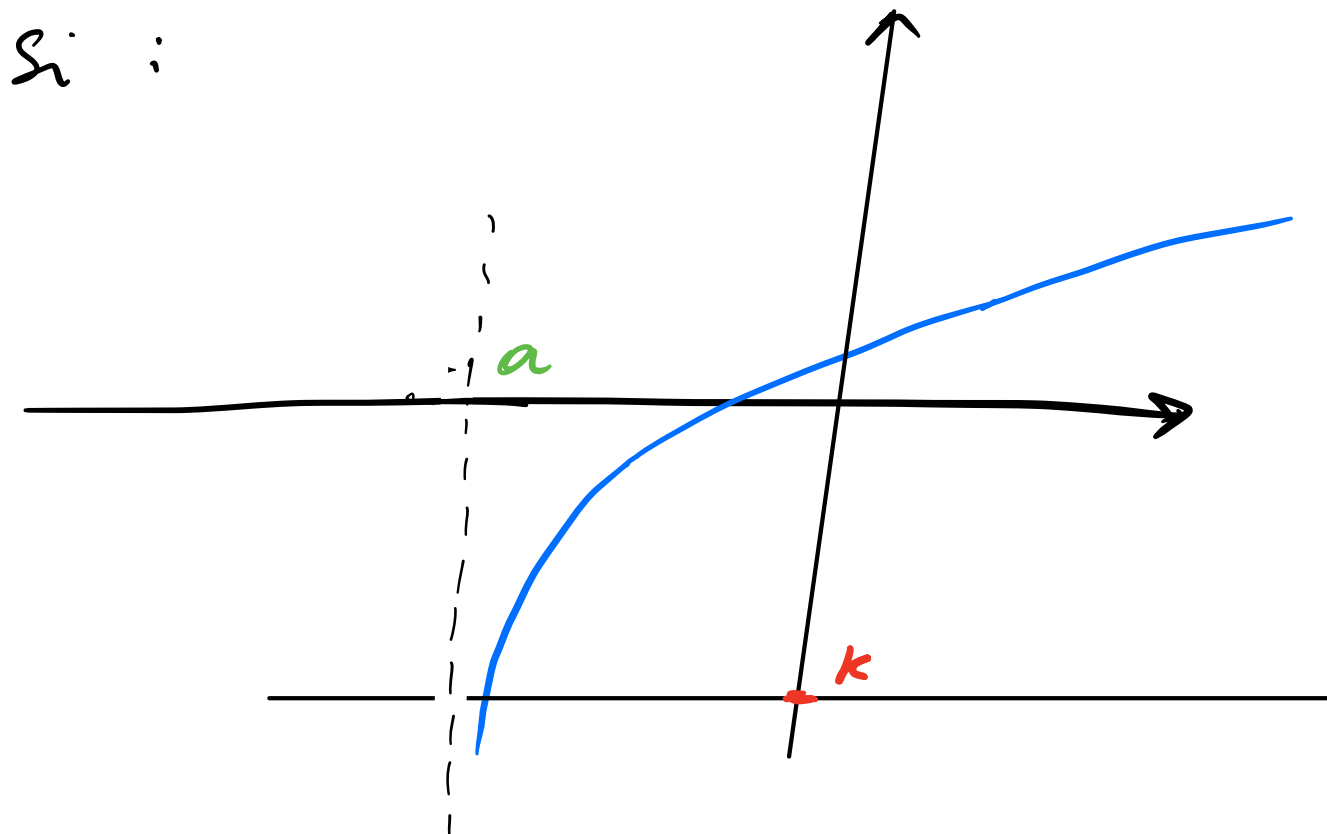
k

$$x > M_k$$

M_k



Una más: Decimos que f tiene límite $-\infty$ cuando x tiende a a^+ si:

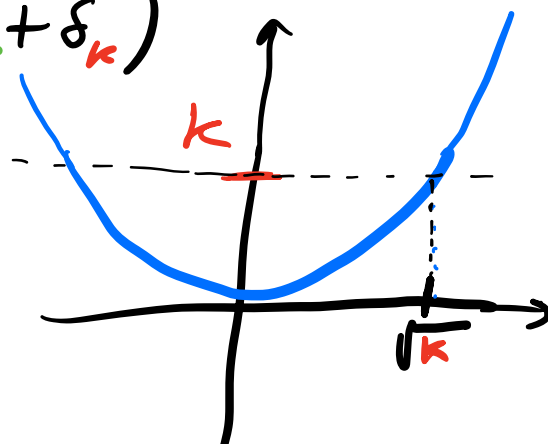


$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists \delta_k > 0 /$$

$$f(x) < k \quad \forall x \in (a, a + \delta_k)$$

Ejemplos: $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

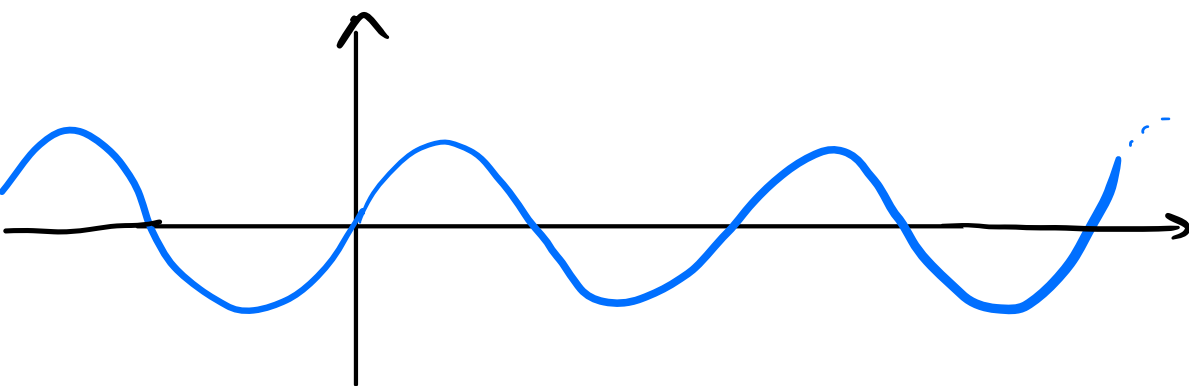


En este caso, si $x > \sqrt{k} \Rightarrow f(x) > k$

En este caso, el M_k que nos sirve es
$$M_k = \sqrt{k}$$

es decir $f(x) > k \quad \forall x > \sqrt{k}$.

Ejemplo: ~~$\exists$~~ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Sen}(x)$



Asumiremos: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

si quieren probarlo como ejercicio,

Sugerencia: recordar $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$
 $\forall n \in \mathbb{Z}$

Todas las propiedades que valían
para el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ valen cuando

$x \rightarrow x_0^{\pm}$ o $x \rightarrow \pm\infty$. Salvo

cundo hay indeterminaciones

Ej:
si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} (f+g)(x) = L_1 + L_2$$

Lo mismo para el producto, resta, cocient.

Tabla para límite de la suma

$\lim f$ $\lim g$	$k_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$k_2 \in \mathbb{R}$	$k_1 + k_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

ind

Tabla para límite del producto

$\lim f$ $\lim g$	$k_1 > 0$	$k_2 < 0$	$k = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$k_1 > 0$	$k_1 k_2$	$k_1 k_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$k_2 < 0$	$k_1 k_2$	$k_1 k_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$k = 0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Indeterminaciones

Ejemplos

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \left(\frac{1}{x}\right)$$

$x \rightarrow +\infty \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$$

Ejemplo: $f(x) = x$; $g(x) = -x^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{(1-x)}_{-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty$$

En este caso los sumandos tienen límite $\pm\infty$
pero la suma tiene límite $-\infty$

Si tenemos ahora que

$$f(x) = -x, \quad g(x) = x^2$$

Ahora $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g) = +\infty$

En este caso, los sumandos tienen

límite $\pm \infty$ y la suma tiene

límite $+\infty$

Por eso decimos que

$(+\infty) + (-\infty)$ es indeterminado