CUESTIONARIO LAS 18:05…

FÍSICA EXPERIMENTAL 1

Roman Demczylo

roman.demczylo@gmail.com

Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Instituto de Física

FACULTAD DE
INGENIERÍA
UDELAR

MÍNIMOS CUADRADOS

MÍNIMOS CUADRADOS

PROBLEMA

Supongamos que un sistema físico puede describirse de la siguiente forma:

$$y(x) = f(x; a_1, \ldots, a_n)$$

donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son los **parámetros** y (x, y) son las **variables**.

EJEMPLO: Ley de Ohm

$$V = RI$$

V, I: *Variables*

R: *Parámetro*

MÍNIMOS CUADRADOS

CASO LINEAL

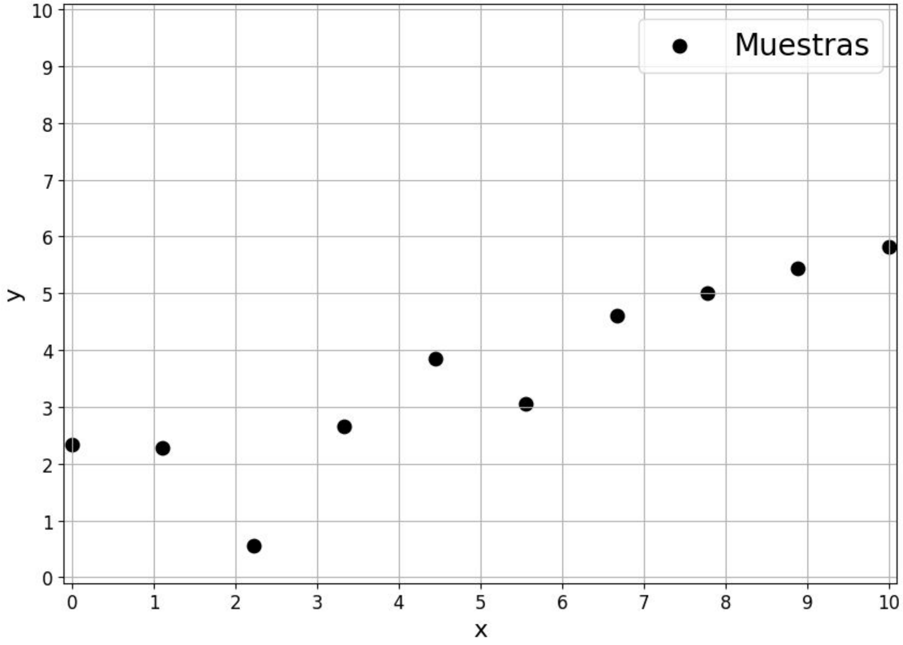
Tomamos *N* medidas (x_i, y_i) del modelo lineal:

Modelo Lineal

$$y = ax + b$$

Cada medida debe verificar el modelo lineal

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \\ \vdots \\ ax_N + b = y_N \end{cases}$$



MÍNIMOS CUADRADOS

SOLUCIÓN

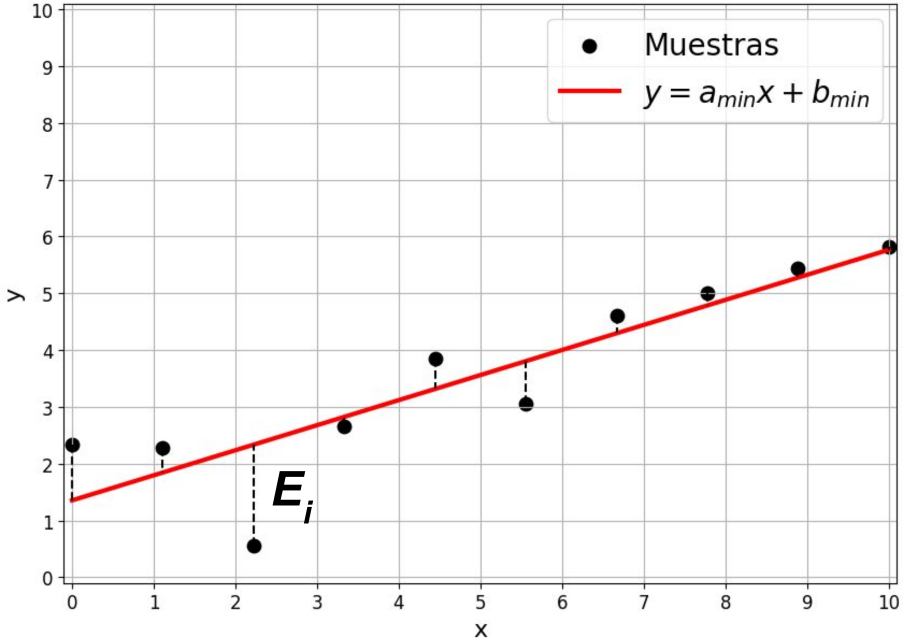
Minimizando la suma cuadrática del error:

$$J(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (\underbrace{ax_i + b - y_i}_{E_i = y(x_i) - y_i})^2$$

$$\nabla J = 0$$

$$a_{\min} = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$b_{\min} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

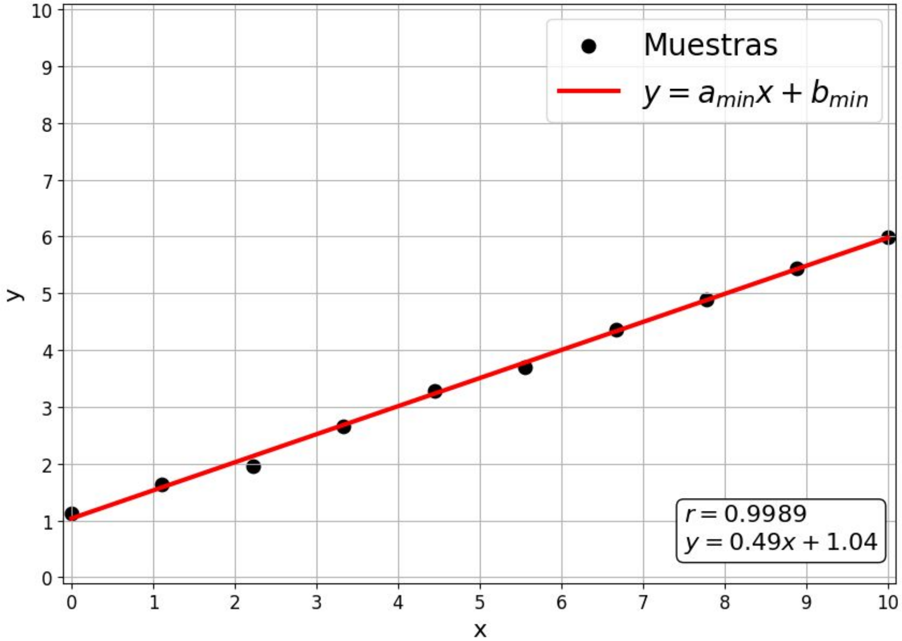


MÍNIMOS CUADRADOS

CALIDAD DE LA SOLUCIÓN

Se mide utilizando el coeficiente de correlación:

$$r = \frac{N\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\sqrt{\left(N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right)\left(N\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right)}}$$



$|r| \simeq 1 \quad \Rightarrow$ Correlación fuerte

$|r| \simeq 0 \quad \Rightarrow$ No hay correlación

$0 < |r| < 1 \Rightarrow$ Correlación estadística

MÍNIMOS CUADRADOS

CALIDAD DE LA SOLUCIÓN

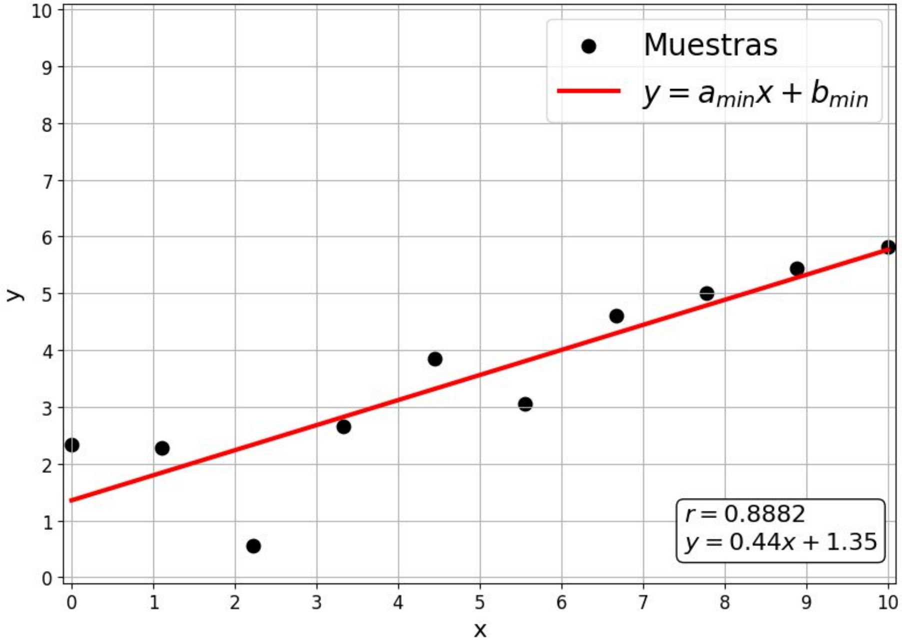
Se mide utilizando el coeficiente de correlación:

$$r = \frac{N\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\left(N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right)\left(N\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2\right)}}$$

$|r| \simeq 1 \quad \Rightarrow$ Correlación fuerte

$|r| \simeq 0 \quad \Rightarrow$ No hay correlación

$0 < |r| < 1 \Rightarrow$ Correlación estadística



MÍNIMOS CUADRADOS

CALIDAD DE LA SOLUCIÓN

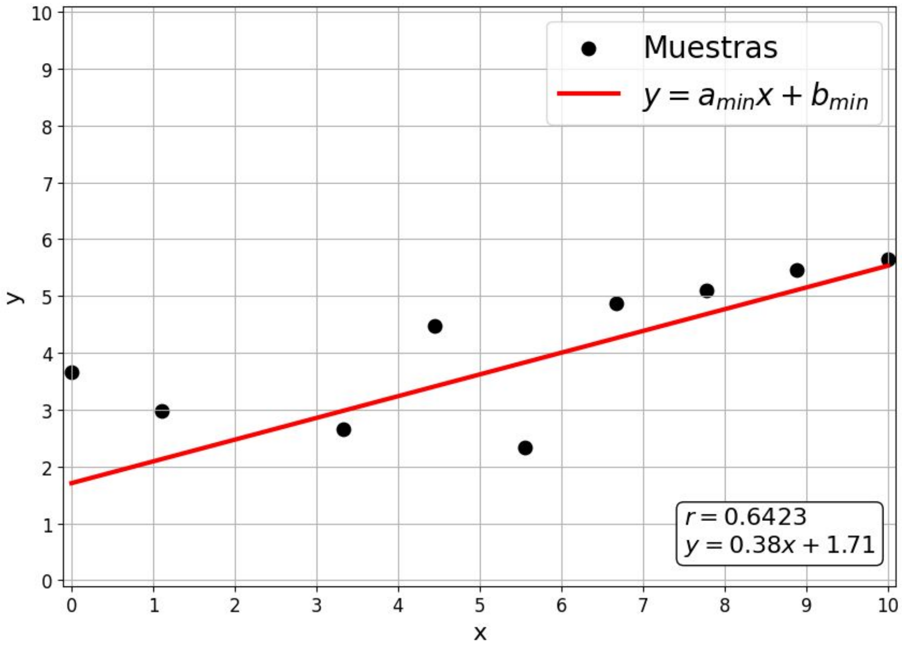
Se mide utilizando el coeficiente de correlación:

$$r = \frac{N\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\left(N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right)\left(N\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2\right)}}$$

$|r| \simeq 1 \Rightarrow$ Correlación fuerte

$|r| \simeq 0 \Rightarrow$ No hay correlación

$0 < |r| < 1 \Rightarrow$ Correlación estadística



MÍNIMOS CUADRADOS

INCERTIDUMBRES EN PARÁMETROS (LOS CALCULA SCIDAVIS)

$$\sigma_a = \frac{|a_{min}|}{\sqrt{r^2-1}}\sqrt{\frac{1}{N-2}}$$

$$\sigma_b = \sigma_a\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}}$$

$$a = a_{min} \pm \sigma_a$$

$$b = b_{min} \pm \sigma_b$$

CAMBIOS DE VARIABLE (EJEMPLO)

$$Y = bX^a \quad \Rightarrow \quad \log Y = \log b + a \log X$$

$$u(Y) = log(Y)$$
$$v(X) = log(X)$$

$$u(v) = \log b + av$$

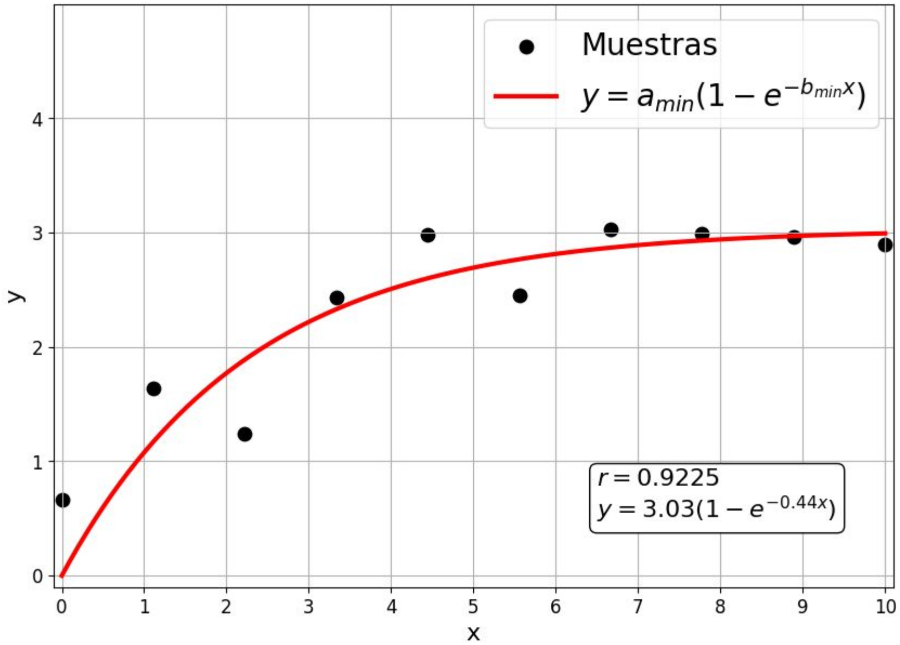
MÍNIMOS CUADRADOS

CASO NO LINEAL

El método se puede utilizar incluso para modelos no lineales:

$$y(x) = a(1 - e^{-bx})$$

$$\begin{cases} y_1 = a(1 - e^{-bx_1}) \\ y_2 = a(1 - e^{-bx_2}) \\ \vdots \\ y_N = a(1 - e^{-bx_N}) \end{cases}$$



PÉNDULO SIMPLE

PÉNDULO SIMPLE

MODELO FÍSICO

Parámetros: *L, m, g*

Variables de estado: $\theta(t)$

Barra de masa despreciable

Rozamiento despreciable

Masa puntual

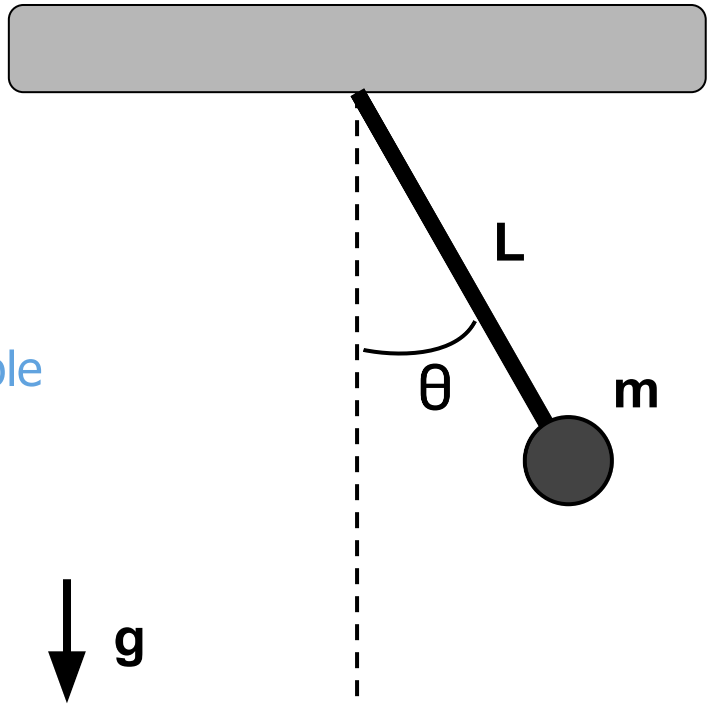
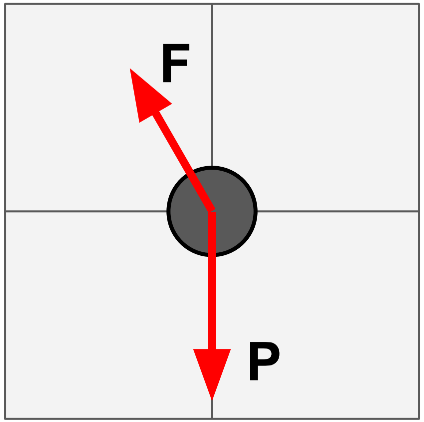


Diagrama de Fuerzas



PÉNDULO SIMPLE

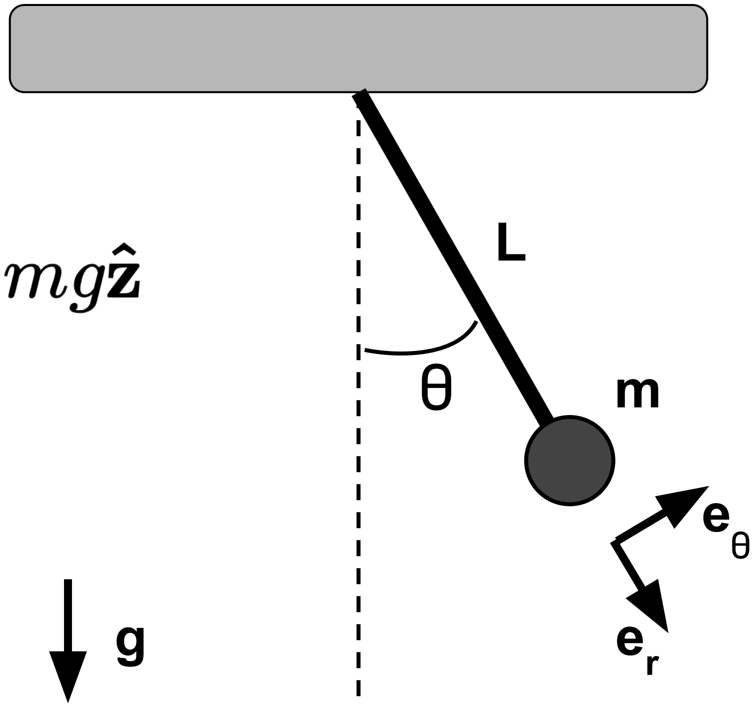
MODELO FÍSICO

Segunda Ley de Newton:

$$m(-L\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + L\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta) = -F\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} - mg\hat{\mathbf{z}}$$

Proyectando:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$



PÉNDULO SIMPLE

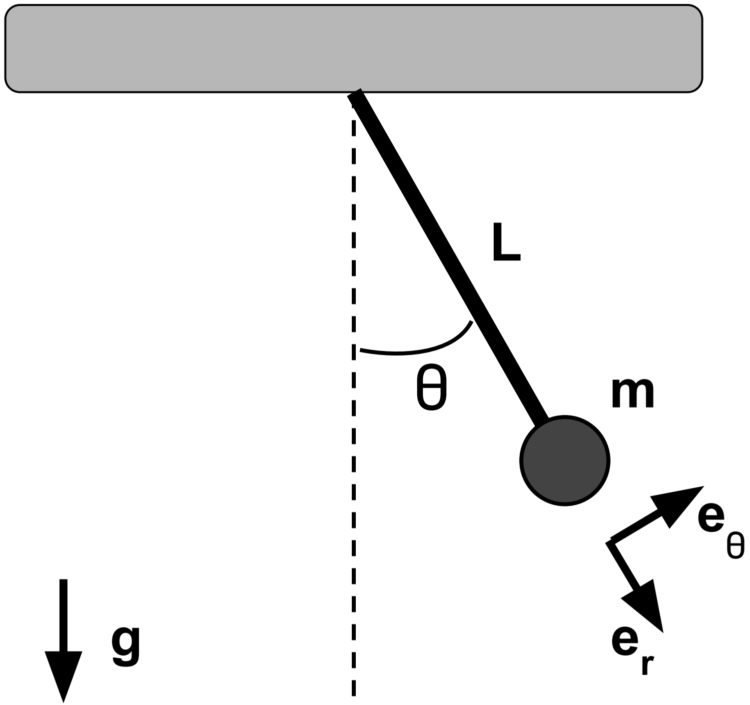
MODELO FÍSICO

Aproximación de pequeñas oscilaciones:

$$\sin\theta \simeq \theta$$

Ecuación diferencial linealizada (teoría lineal):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$



PÉNDULO SIMPLE

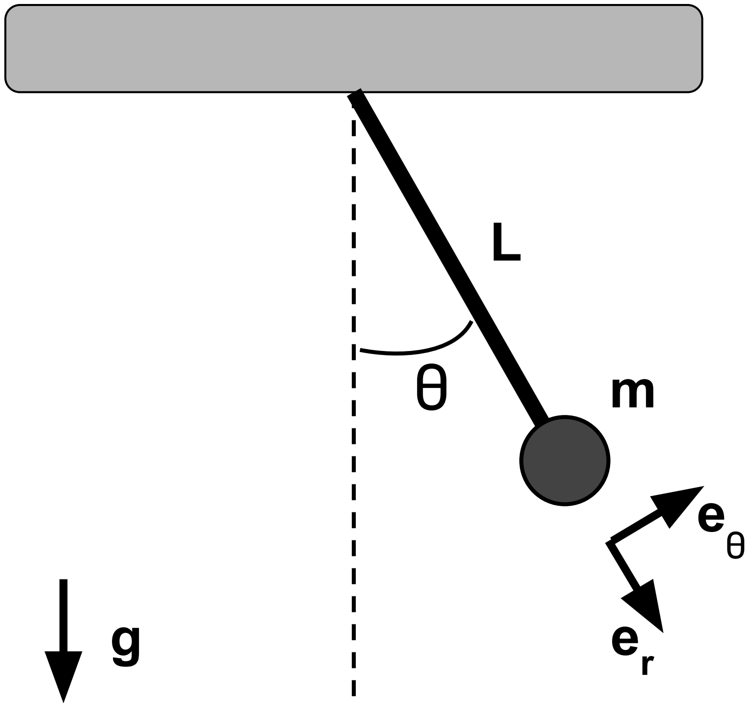
MODELO FÍSICO

Resolviendo la ecuación diferencial lineal:

$$\theta(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta_0\right)$$

Periodo de oscilación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



PÉNDULO SIMPLE

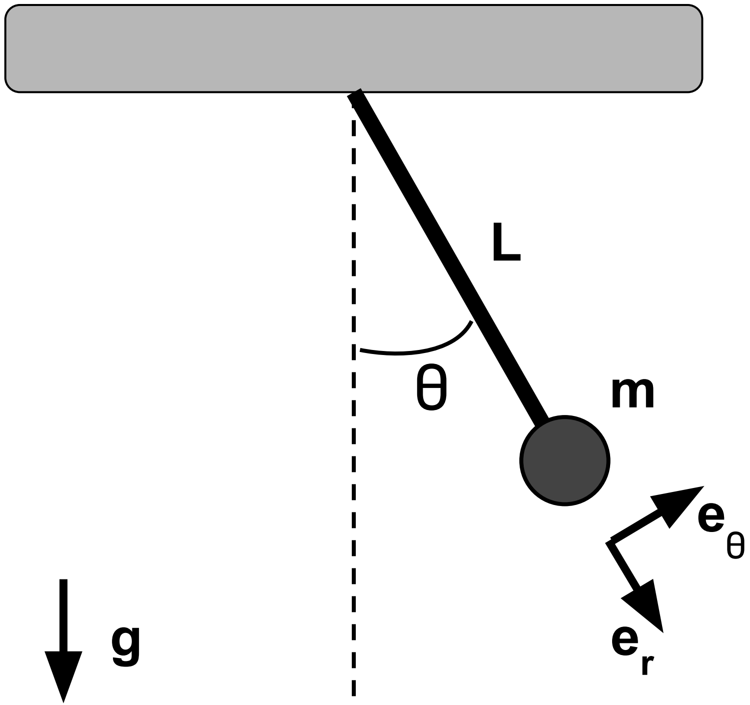
MODELO FÍSICO

Sin considerar la linealización,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{\theta_0}{\sin\theta_0}\right)^{\frac{3}{8}}$$

es una aproximación adecuada del periodo.

Observación: No depende de la masa.



PRÁCTICA

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Set de medidas (T, θ_0)

Fijar L, variar θ_0 hasta los 60º, medir T luego de oscilar **10 veces**, para cada θ_0:

θ_0 (º)	T_{10}(s)	T (s)
5	9.00	0.90 ± 0.02
15	9.01	0.90 ± 0.02
…	…	…
55	9.50	0.95 ± 0.02

Tabla 1: Ejemplo con L = 0.25 m

Tiempo de reacción Apreciación

$$T = \underbrace{\overline{T}}_{\frac{T_{10}}{10}} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{t_r^2 + \sigma_{Apr.}^2}}_{\mu(T)}$$

PRÁCTICA

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Set de medidas (T, L)

Fijar θ_0, variar *L*, medir *T* luego de oscilar **10 veces**, para cada *L*:

L (m)	T_{10}(s)	T (s)
0.05	4.36	0.44 ± 0.02
0.10	6.94	0.69 ± 0.02
…	…	…
0.25	10.17	1.02 ± 0.02

Tabla 2: Ejemplo

Tiempo de reacción   Apreciación

$$T = \underbrace{\overline{T}}_{\frac{T_{10}}{10}} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{t_r^2 + \sigma_{Apr.}^2}}_{\mu(T)}$$

<u>**Procurar pequeñas oscilaciones**</u>

PRÁCTICA

TRATAMIENTO DE LOS DATOS

Set de medidas $(T,\ \theta_0)$

Graficar con barras de incertidumbre T vs. θ_0 para encontrar cuando la dependencia $T = T(\theta_0)$ se vuelve apreciable y superponer con el modelo teórico:

$$T = T_0 \left(\frac{\theta_0}{\sin \theta_0} \right)^{\frac{3}{8}} \qquad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Analizar resultados. Recordar que la masa que estamos usando no es puntual.

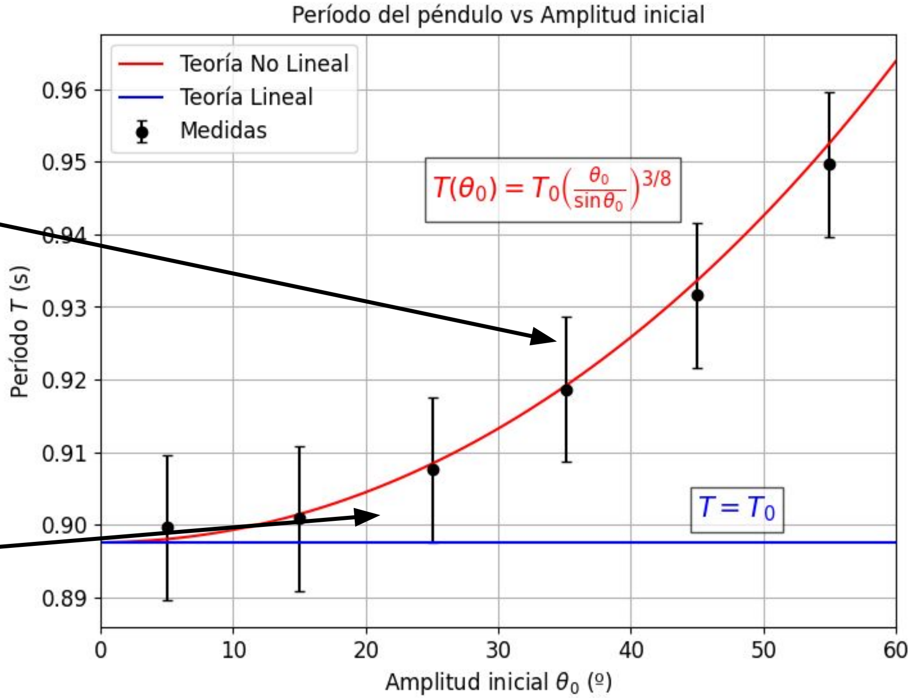
PRÁCTICA

TRATAMIENTO DE LOS DATOS

Set de medidas (T, θ_0)

$$\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{t_r^2+\sigma_{Apr.}^2}$$

(Todas las barras)



Pueden normalizar si desean

Ver cuándo se separan

PRÁCTICA

TRATAMIENTO DE LOS DATOS

Set de medidas (T, L)

Realice un cambio de variable ***u = u(T)*** para encontrar una relación lineal:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L \qquad u(T) = T^2$$

Obtener ***g*** y su **incertidumbre** a través de mínimos cuadrados:

$$g = \overline{g} \pm \mu(g)$$

Analizar resultados comparando con el **g** de referencia. Considere para la discusión qué factores del montaje experimental se apartan del modelo teórico que se está considerando.

PRÁCTICA

TRATAMIENTO DE LOS DATOS

$$g(a) = \frac{4\pi^2}{a}$$

$$2\overline{T}\mu(T)$$

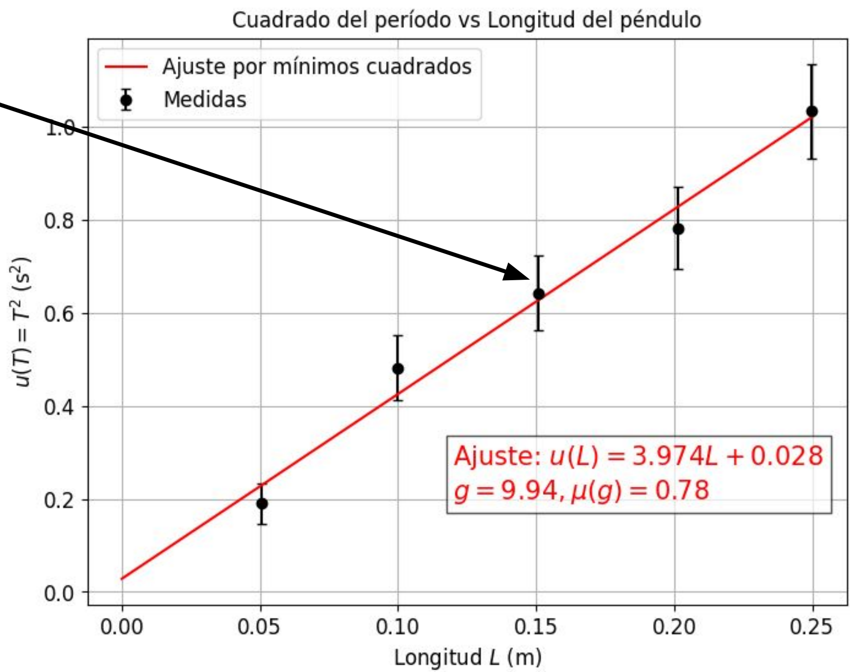
(Todas las barras)

$$\overline{g} \simeq \frac{4\pi^2}{3.974} = 9.94\,\frac{m}{s^2}$$

$$\mu(g) = \frac{4\pi^2}{a^2}\sigma_a \simeq \frac{4\pi^2}{3.974^2}\sigma_a = 0.78\,\frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{g = (9.9 \pm 0.8)\,\frac{m}{s^2}}$$

Set de medidas (T, L)



PRÁCTICA

TRATAMIENTO DE LOS DATOS

Set de medidas (T, L)

Graficar con barras de incertidumbre ***T(L)*** vs. ***L*** y superponer la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

con el ***g*** medido utilizando mínimos cuadrados (diapositiva anterior).

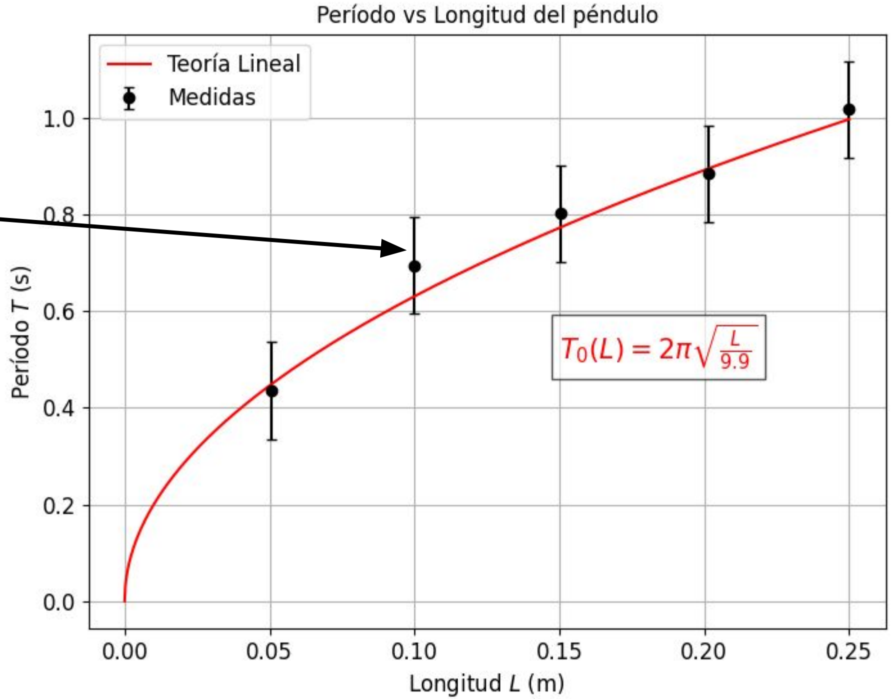
PRÁCTICA

TRATAMIENTO DE LOS DATOS

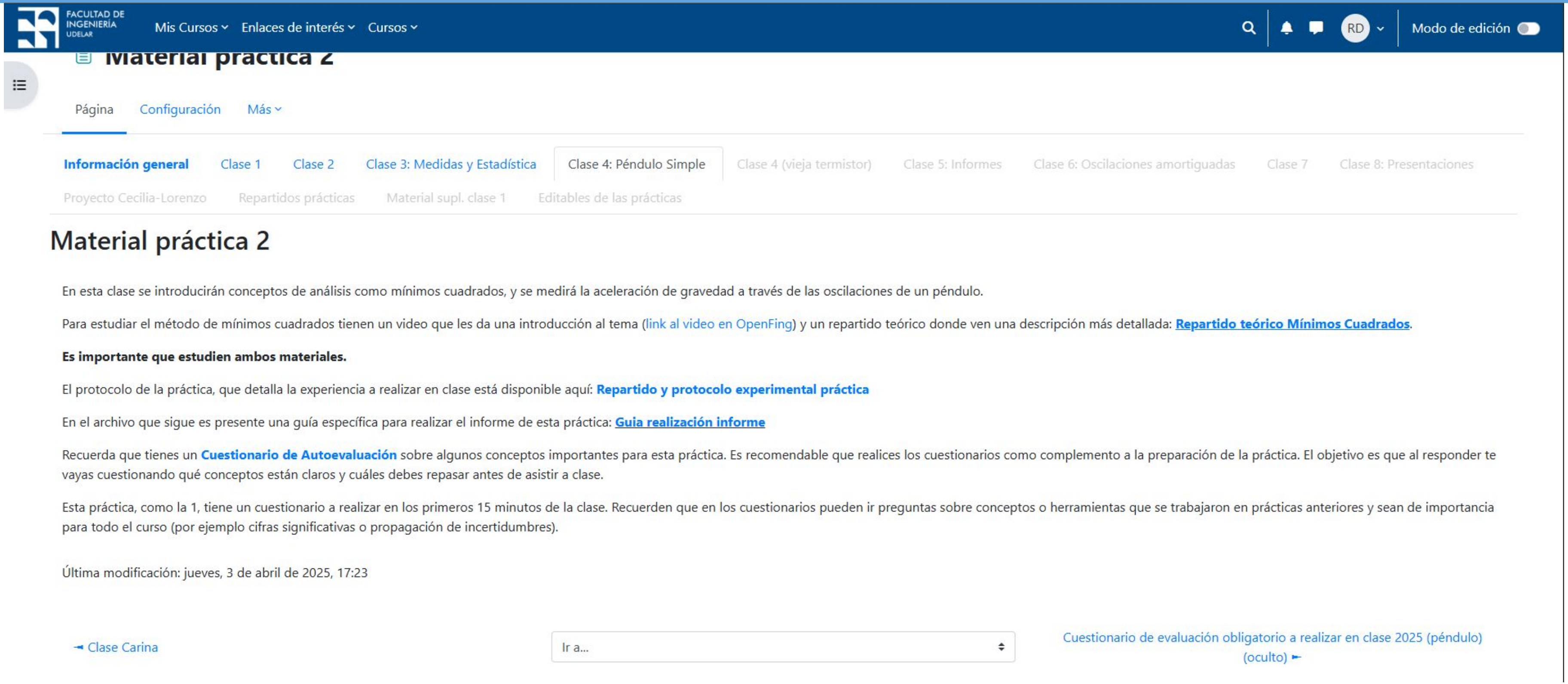
Set de medidas (T, L)

$$\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{t_r^2+\sigma_{Apr.}^2}$$

(Todas las barras)



VER MATERIAL



FACULTAD DE INGENIERÍA UDELAR Mis Cursos Enlaces de interés Cursos RD Modo de edición

Material práctica 2

Página Configuración Más

Información general | Clase 1 | Clase 2 | Clase 3: Medidas y Estadística | Clase 4: Péndulo Simple | Clase 4 (vieja termistor) | Clase 5: Informes | Clase 6: Oscilaciones amortiguadas | Clase 7 | Clase 8: Presentaciones | Proyecto Cecilia-Lorenzo | Repartidos prácticas | Material supl. clase 1 | Editables de las prácticas

Material práctica 2

En esta clase se introducirán conceptos de análisis como mínimos cuadrados, y se medirá la aceleración de gravedad a través de las oscilaciones de un péndulo.

Para estudiar el método de mínimos cuadrados tienen un video que les da una introducción al tema (link al video en OpenFing) y un repartido teórico donde ven una descripción más detallada: **Repartido teórico Mínimos Cuadrados**.

Es importante que estudien ambos materiales.

El protocolo de la práctica, que detalla la experiencia a realizar en clase está disponible aquí: **Repartido y protocolo experimental práctica**

En el archivo que sigue es presente una guía específica para realizar el informe de esta práctica: **Guia realización informe**

Recuerda que tienes un **Cuestionario de Autoevaluación** sobre algunos conceptos importantes para esta práctica. Es recomendable que realices los cuestionarios como complemento a la preparación de la práctica. El objetivo es que al responder te vayas cuestionando qué conceptos están claros y cuáles debes repasar antes de asistir a clase.

Esta práctica, como la 1, tiene un cuestionario a realizar en los primeros 15 minutos de la clase. Recuerden que en los cuestionarios pueden ir preguntas sobre conceptos o herramientas que se trabajaron en prácticas anteriores y sean de importancia para todo el curso (por ejemplo cifras significativas o propagación de incertidumbres).

Última modificación: jueves, 3 de abril de 2025, 17:23

◄ Clase Carina Ir a... Cuestionario de evaluación obligatorio a realizar en clase 2025 (péndulo) (oculto) ►

https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_all.html

COMENTARIOS SOBRE MASA NO PUNTUAL

MODELO FÍSICO

Primera cardinal:

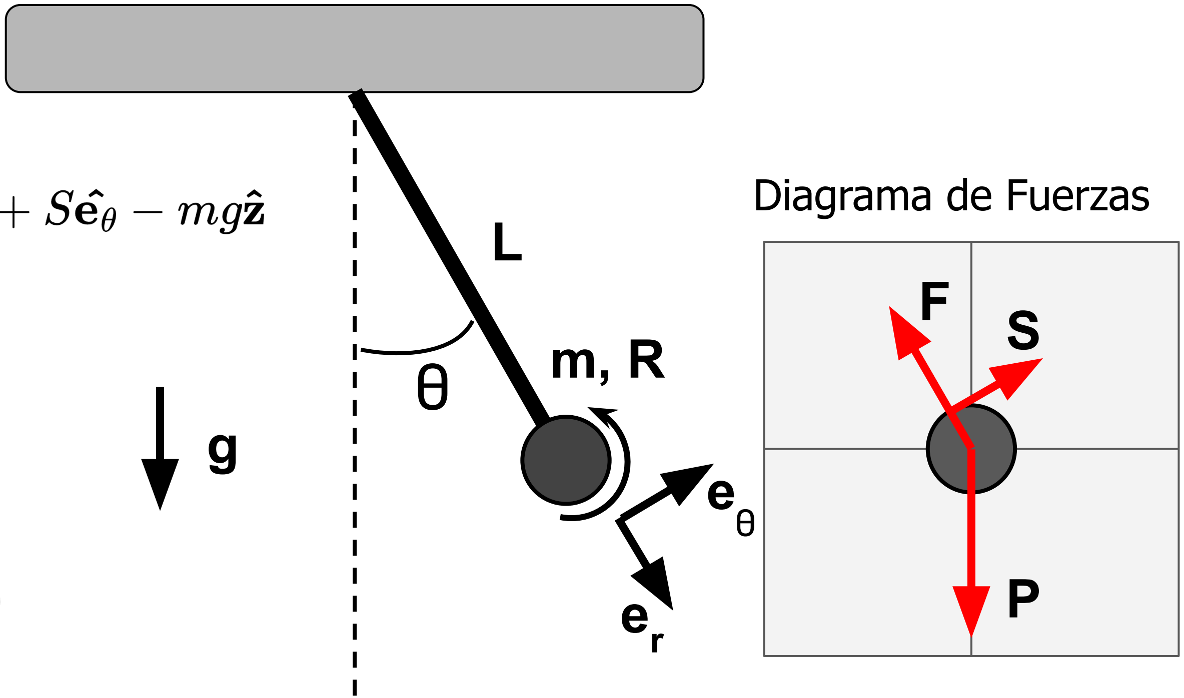
$$m(-L\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + L\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta) = -F\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + S\hat{\mathbf{e}}_\theta - mg\hat{\mathbf{z}}$$

Segunda cardinal:

$$\frac{2}{5}mR^2\ddot{\theta} = -SR$$

Proyectando y combinando:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\frac{1}{\frac{2}{5}\frac{R}{L}+1}\sin\theta = 0$$



Obs.: Si L ≫ R, es como si la masa fuese puntual.