

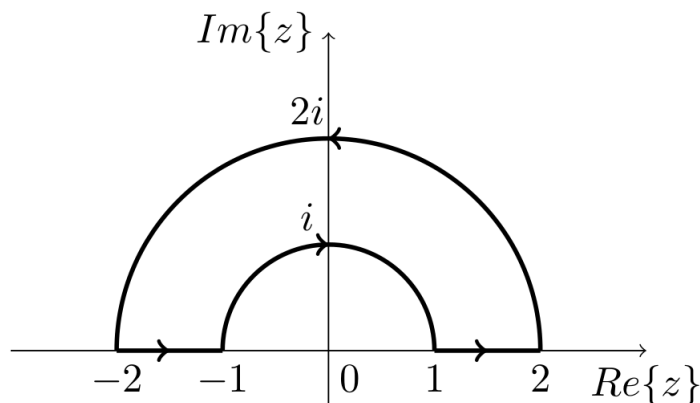
Práctico 5 - Integración en el plano complejo, teoría de Cauchy.

Salvo que se indique lo contrario Ω será un región del plano complejo, es decir un conjunto abierto y conexo.

1. Calcular $\int_{\gamma} f(z) dz$ en los siguientes casos:

- a) $f(z) = e^z$ siendo $\gamma(t) = (e^t - 1)(e^t - e^{\pi}) + i \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.
- b) $f(z) = z^m \bar{z}^n$ siendo $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con m y n enteros.
- c) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = i + 3e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ y $f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}$.
- d) $f(z) = \frac{z+2}{z}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
- e) $f(z) = \frac{z+2}{z}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
- f) $f(z) = 1/z$, $\gamma(t) = 5e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
- g) $f(z) = 1/z$, con γ una curva cualquiera en el semiplano superior que conecta 5 con -5 .
- h) $f(z) = \sin z$, $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$.

2. Calcular $\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz$ donde γ es la curva de la figura.



- 3. Sea γ el arco de la circunferencia $|z| = 2$ recorrido en sentido anti-horario desde $z = 2$ hasta $z = 2i$. Probar que $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$.
- 4. a) Probar que no existe una función $g : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $g'(z) = 1/z$.
b) Demostrar que si existe una función continua $g : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ entonces coincide localmente con las funciones logaritmo clásicas, y por lo tanto g es holomorfa. Concluir que no puede existir dicha g .

5. Si f es continua en un entorno de $z = a$, mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$

6. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Demostrar que si f_n converge uniformemente a f en todo compacto $K \subseteq \Omega$ entonces para toda curva regular γ se cumple que $\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_n \int_{\gamma} f_n(z) dz$
7. Calcular la integral $\int_C \frac{z}{z^2+4} dz$ donde C es la circunferencia de centro 0 y radio 16
8. Calcular $\int_{|z|=1} e^z z^{-n} dz$ y $\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz$. *Sugerencia: recordar el teorema de Cauchy y la fórmula de Cauchy para derivadas.*
9. Considere γ el cuadrado de vértices $\pm 2, \pm 2i$ recorrido en sentido antihorario. Calcular:

$$a) \int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z - \pi/2} dz \quad b) \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz \quad c) \int_{\gamma} \frac{z}{2z + 1} dz \quad d) \int_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^4} dz$$

10. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto cerrado tal que $\Omega := \mathbb{C} - K$ es simplemente conexo y $0 \in \Omega$. Sean $w_0 \in \Omega$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{z_0} = w_0$. Probar que existe una única función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ y $g(w_0) = z_0$.