

Práctico 4 - Funciones holomorfas

1. Estudiar en qué puntos son derivables las siguientes funciones y en dichos puntos calcular la derivada.
 - a) $f(z) = |z|$
 - b) $f(z) = \bar{z}$
 - c) $f(z) = 1/z$
 - d) Sea $f(z) = \log(\varphi(z))$, donde $\varphi(z) = (1+z)/(1-z)$ ($\log$ denota el logaritmo principal, es decir, el argumento pertenece al intervalo $[0, 2\pi)$).
2. Sea $f(z) = \sqrt{|xy|}$ con $z = x + iy$. Verificar que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el origen pero f no es derivable en el origen.
3.
 - a) Mostrar que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable entonces el determinante del jacobiano de f vista como función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ es $\det(J_{(x,y)}f) = |f'(z)|^2$.
 - b) Mostrar que si $v = (v_x, v_y)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ entonces $J_{(x,y)}f(v_x, v_y) = (w_x, w_y)$ sii $f'(x + iy)(v_x + iv_y) = w_x + iw_y$.
4. Se llama “región” a un conjunto abierto y conexo. Sea $f \in H(\Omega)$ donde Ω es una región. Probar que cada una de las siguientes condiciones implica que f es constante en Ω .
 - a) $f'(z) = 0$ en Ω .
 - b) $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$.
 - c) $f(\Omega)$ esta contenido en un recta.
 - d) $|f(z)|$ constante en Ω .
 - e) $f(\Omega)$ tiene interior vacío. *Sugerencia: observar que el determinante del Jacobiano de f debe ser 0 en todo punto, por qué?*
5. Una base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ se dice *positiva* o *positivamente orientada* si cumple la regla de la mano derecha¹. Una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable con matriz Jacobiana invertible se dice que preserva orientación si para todo $p \in \mathbb{R}^2$ y para toda base $\{v_1, v_2\}$ se cumple que la base $\{J_p f v_1, J_p f v_2\}$ es positiva. Es un resultado que pueden aceptar que esto ocurre si y sólo si $J_p f$ tiene determinante positivo en todo punto p .
 - a) Probar que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa con $f'(z) \neq 0 \forall z$ entonces preserva orientación.
 - b) Probar que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa con $f'(z) \neq 0 \forall z$ entonces f es conforme. Recordar que un mapa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con matriz jacobiana invertible, se dice *conforme* si preserva ángulos. *Sugerencia: usar la notación compleja.*
 - c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función diferenciable con matriz Jacobiana invertible. Probar que si es conforme y preserva orientación entonces es holomorfa como función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, y además la derivada es no nula.

¹Formalmente, si la matriz de cambio de base de la base canónica a $\{v_1, v_2\}$ tiene determinante positivo.

6. Ejercicio del examen Febrero 2010.

- a) Encontrar una función holomorfa que transforme la faja vertical $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. (Sugerencia: considerar la rotación $z \mapsto iz$ y la función exponencial compleja)
- b) Sean a y b dos complejos diferentes. Llamemos Ω al conjunto que resulta de quitarle el segmento $[a, b]$ al plano complejo.

Hallar una función holomorfa que transforme Ω en el plano complejo menos la semirecta $\{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$. (Sugerencia: Buscar una función de Möbius que transforme la recta que contiene al segmento $[a, b]$ en la recta $y = 0$.)

- c) Mostrar que existe una función holomorfa que lleva Ω en el disco unitario. (Sugerencia: Observar que al definir la raíz cuadrada con argumento adecuado, se puede transformar el plano complejo menos una semirecta en un semiplano abierto; y aplicar esto correctamente junto con las partes anteriores.)

7. Sea f una función de variable compleja definida en una región Ω tal que $0 \notin \Omega$. Denotamos $w = f(z)$ donde $z \in \Omega$. La función f se puede expresar como:

$$w = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$$

donde $z = re^{i\varphi}$, $u = \operatorname{Re}(w)$, $v = \operatorname{Im}(w)$, $r \in (0, +\infty)$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Es decir, en vez de dar z por su parte real e imaginaria, se da en polares. Mostrar que si f es holomorfa entonces u y v son derivables respecto a r y φ . Mostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares quedan

$$u_r = \frac{1}{r}v_\varphi \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\varphi$$

Además

$$f'(z) = e^{-i\varphi} \left[u_r(r, \varphi) + iv_r(r, \varphi) \right] = \frac{e^{-i\varphi}}{r} \left[v_\varphi(r, \varphi) - iu_\varphi(r, \varphi) \right]$$

8. **Funciones armónicas.** Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, una función $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 se dice armónica cuando $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. El operador Δ se llama Laplaciano.

- a) Probar que si $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces $\operatorname{Re}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ son funciones armónicas. *Nota: no se pide probar que f es de clase C^2 . Esto será probado más adelante en el curso.*
- b) Muestre que la función $u(x, y) = \cosh(y) \sin(x)$ es armónica en el plano y construya otra función armónica $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$.
- c) Si $u : \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ está definida por $u(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$. Observar que si bien es armónica, no es posible encontrar $f : \mathbb{C} - \{0\} \mapsto \mathbb{C}$ holomorfa que cumpla $\operatorname{Re}(f) = u$.
- d) Si $u : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, es armónica y Ω es simplemente conexo entonces existe $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ armónica y tal que $f = u + iv$ es holomorfa.
Sugerencia: Intentar vincular con el hecho de que todo campo irrotacional es de gradientes si el dominio es simplemente conexo.