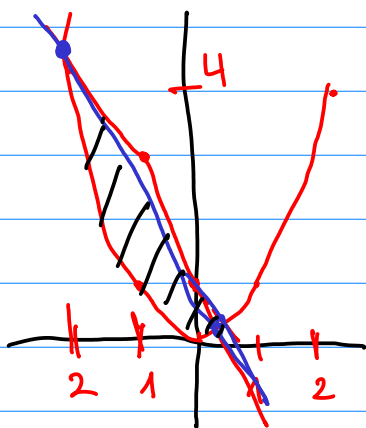


3.6.11. a) $f(x) = x^2$
 $g(x) = -2x + 1$



$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = -2x + 1$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (-2x+1-x^2) dx = -\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}}$$

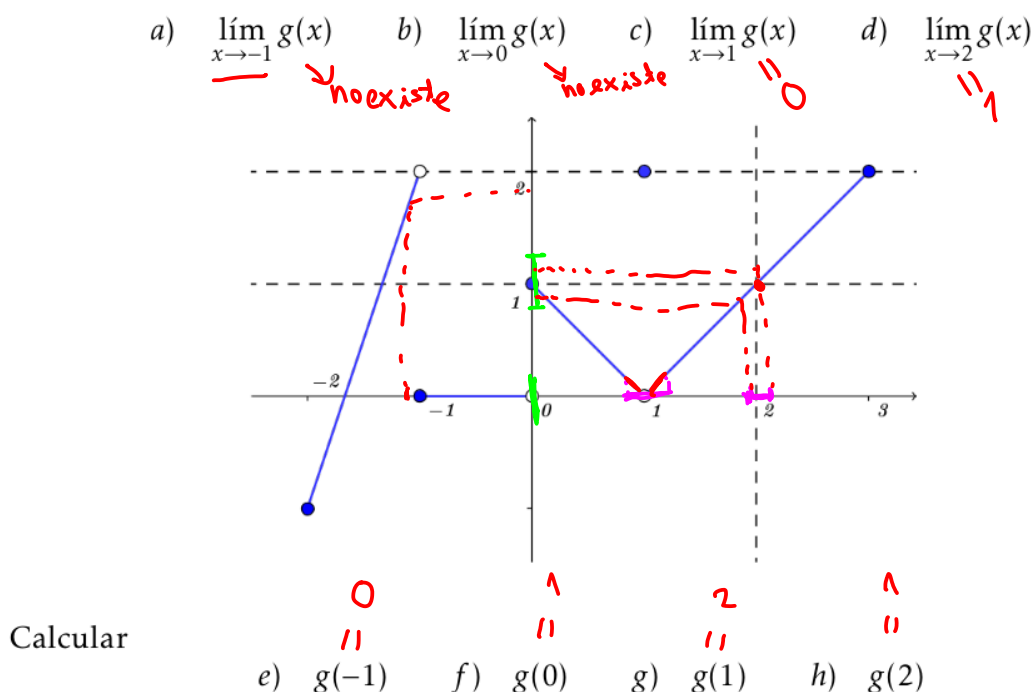
$$\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (-2x+1) dx - \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} x^2 dx$$

3.2.3 $P_{nm} = \{a_0, \dots, a_{nm}\}$ de $[0, n]$

$$S_*(f, P_{nm}) \leq \int_0^n f(t) dt \leq S^*(f, P_{nm})$$

En esta sección no se piden pruebas formales.

1. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra a continuación o explique por qué no existen



1

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I, L \in \mathbb{R}$$

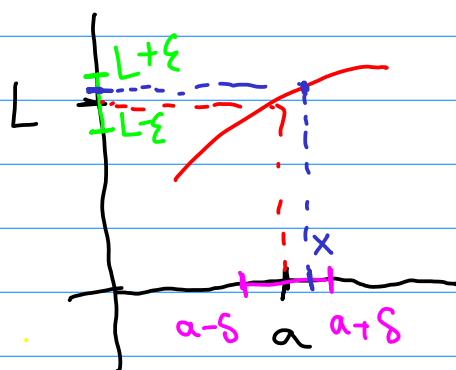
Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $a \in \mathbb{R}$ es $L \in \mathbb{R}$ si se cumple:

para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$

entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$$

$$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$



4.2.1. $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-10}$

a) $f(x) = x^2, a = 0$

$L = 0$. Tomo $\varepsilon > 0$. Voy a tomar $|x - a| < \delta$.

$\Rightarrow |f(x) - L| = |x^2| = |x|^2 < \delta^2$

Va a servir cualquier $\delta > 0$ tal que $\delta^2 \leq \varepsilon$, o sea, $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$

Puedo tomar por ejemplo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Esto funciona porque $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ implica $|x^2| < \varepsilon$

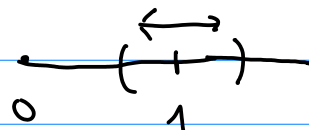
b) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1$ Quiero $x > 0$. Sólo considero $\delta < 1$.

$L = 1$. Considero $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 1| < \delta$

$|f(x) - L| = \left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1-x}{x} \right| = \frac{|x-1|}{|x|} < \frac{\delta}{x} < 2\delta$

Puedo pedir también $\delta \leq \frac{1}{2}$,

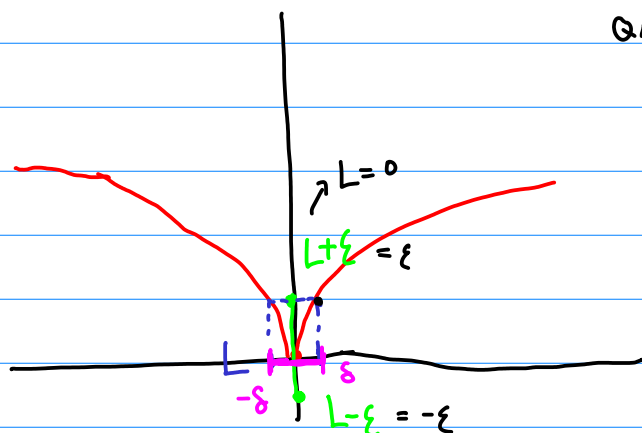
de manera que $x > 1 - \delta \geq \frac{1}{2}$
entonces $\frac{1}{x} < 2$



Voy a tomar $\delta > 0$ tal que $2\delta \leq \varepsilon$. $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Por ejemplo tomo $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{2})$

c) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$, $L = 0$



Quiero tomar δ tal que $f(\delta) = \epsilon$
 $f(-\delta) = \epsilon$

$$\sqrt{|\delta|} = \epsilon, |\delta| = \epsilon^2, \delta = \epsilon^2$$

Tengo que tomar $\delta = \epsilon^2$

5. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{x} = 1$, $a = 3$

Si $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, $\exists \lim_{x \rightarrow a} h(x) \neq 0$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}{\lim_{x \rightarrow a} h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 2f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3} x} = \frac{2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} f(x)}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} f(x)}{4} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin(x)} = 5$, $a = 0$ $\left\{ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \right.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

Prueba



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin(x)} \cdot \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \\ = 5 \cdot 0 = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{e^x - 1} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3) - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 8} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3) - 1}{2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x^3) = 3$$

$$\text{Si } \lim_{y \rightarrow b} f(y) = L \quad \text{y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L \quad g(x) = x^3$$