

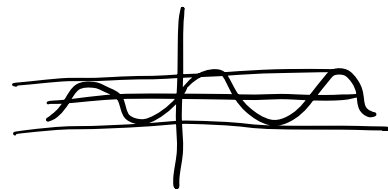
Recordamos: Sean $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ y

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, g está acotada en un entorno de x_0 .

Entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

Ejemplo: $f(x) = x^2$

$g(x) = \sin(1/x)$



Observar que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, y que

$|\sin(1/x)| \leq 1$ porque $|\sin(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Entonces, en particular $\sin(1/x)$ está acotada en un entorno de 0.

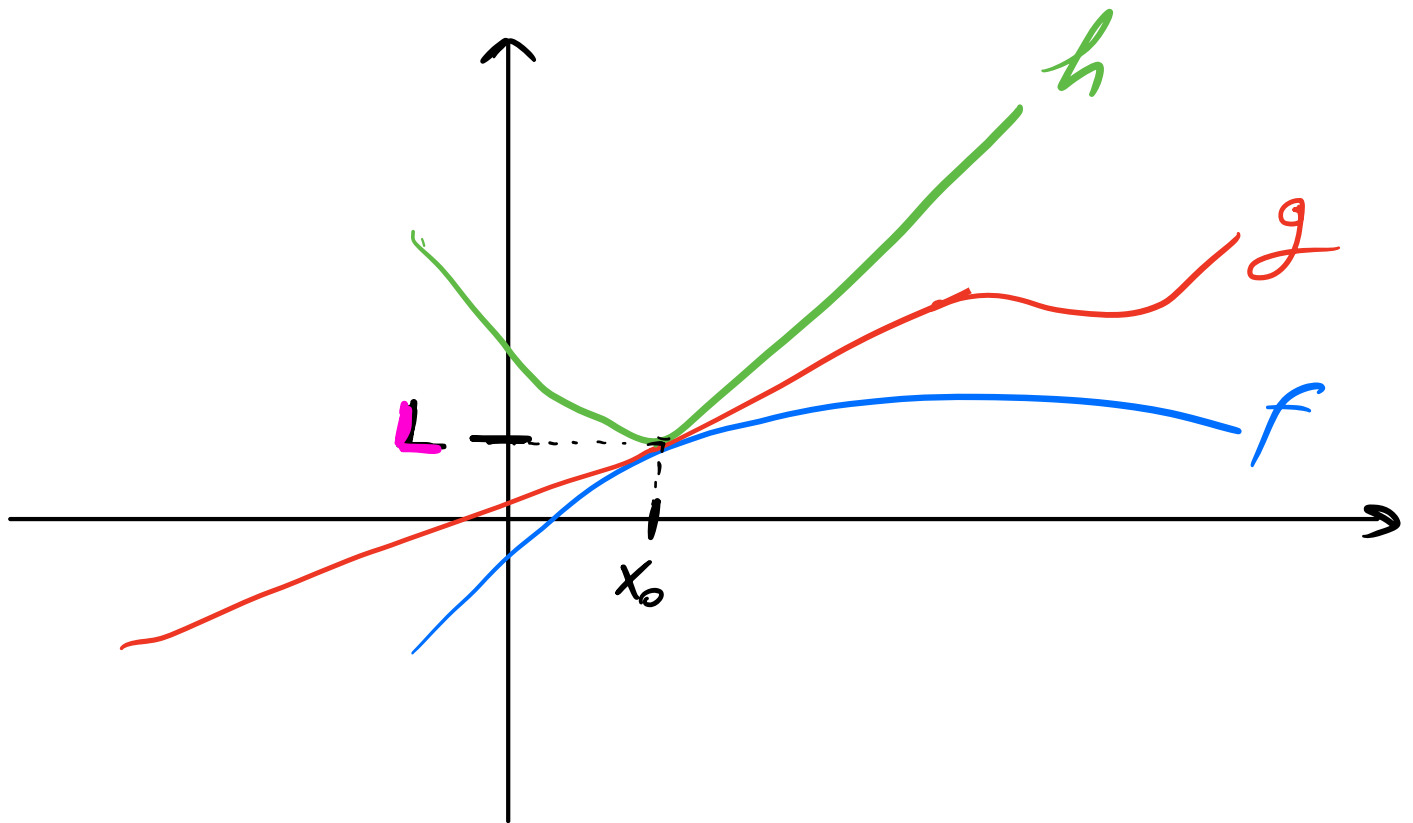
Entonces, por la proposición anterior:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x) = 0$$

$\downarrow$
0

ACOTADO.

Teorema del Sandwich



Teorema (del sandwich)

Sean f , g y h funciones definidas en un intervalo I que cumplen:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$$

$$\text{Entonces } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

Dem: Queremos ver que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L. \text{ Entonces, } \forall \varepsilon > 0$$

Queremos encontrar $\delta_\varepsilon > 0$ /

$$f(x) \in E(L, \varepsilon) \quad \forall x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon)$$

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera.

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, existe

$$\delta_\varepsilon^1 > 0 \quad / \quad h(x) \in E(L, \varepsilon) \quad \forall x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon^1)$$

Entonces $L - \varepsilon \leq h(x) \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon^1)$

Análogamente, podemos concluir que

$$\exists \delta_\varepsilon^2 > 0 \quad / \quad L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon^2)$$

Veamos que el δ_ε para f es

$$\delta_\varepsilon := \min \{ \delta_\varepsilon^1, \delta_\varepsilon^2 \}$$

$$\underbrace{\delta_\varepsilon^1}_{\delta_\varepsilon^2} \left(\underbrace{(\cdot)}_{x_0} \right)$$

En efecto:

$$\text{Si } x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon) \Rightarrow x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon^1) \Rightarrow h(x) \leq L + \varepsilon$$

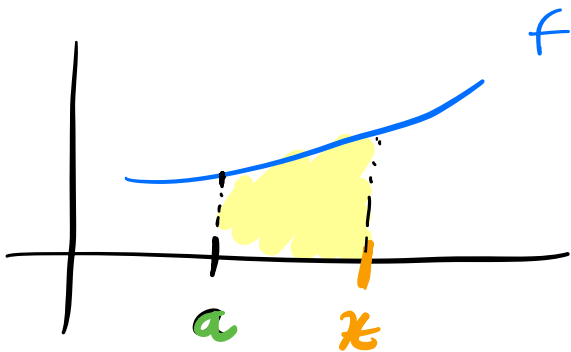
$$\text{Si } x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon) \Rightarrow x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon^2) \Rightarrow L - \varepsilon \leq f(x)$$

$$\text{Entonces, si } x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon) \Rightarrow$$

$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow g(x) \in E(L, \varepsilon) \quad \forall x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon)$$

Continuidad de la función integral



$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

función integral

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ función integrable y $a \in I$,

y $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

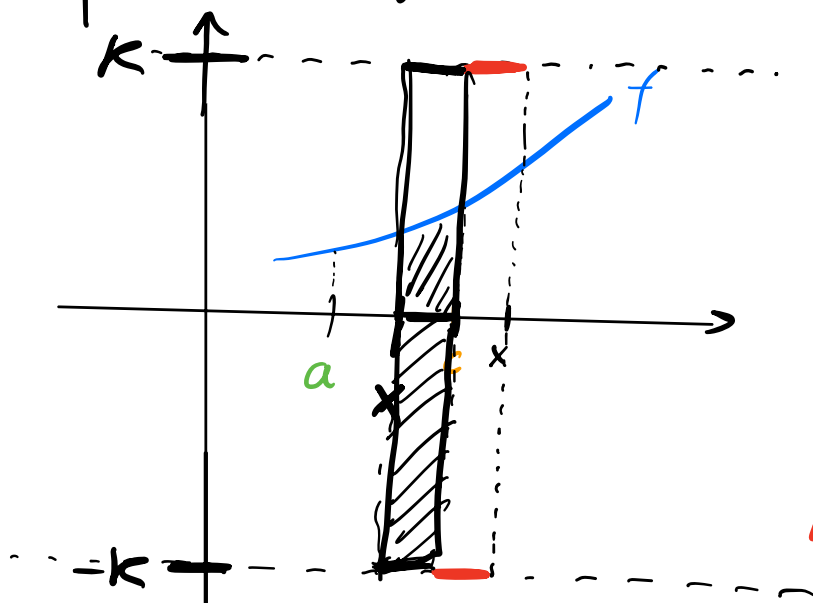
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Entonces F es continua.

Dem: Tomemos un $c \in I$. Queremos ver que

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c)$$

Queremos encajuchar la función F entre dos funciones que, en c , tienen límite $F(c)$ para luego concluir que $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c)$



Recordamos: Monotonía de la Integral

Si $a < b$
 $f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$
 $\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt$$

Aditividad

ε3

respecto del
intervalo

Como f es integrable en I , en particular es acotada en I , lo que implica que $\exists k > 0$ /
 $-k \leq f(x) \leq k \quad \forall x \in I$.

Entonces, si $c < x$:

aplicando la monotonía de la integral, obtenemos que :

$$-k(x-c) = \int_c^x -k \, dt \leq \int_c^x f(t) \, dt \leq \int_c^x k \, dt = k(x-c) \quad (EI)$$

Si $x < c$ de nuevo por monotonía:

$$-k(c-x) \leq \int_x^c f(t) \, dt \leq k(c-x)$$

Entonces, cambiando el signo:

$$-(-k(c-x)) \geq -\left(\int_x^c f(t) dt\right) \geq -(k(c-x))$$

$$-k(x-c) \geq \int_c^x f(t) dt \geq k(x-c)$$

$\Rightarrow$

$$k(x-c) \leq \int_c^x f(t) dt \leq -k(x-c) \quad (E2)$$

Por (E3), cuando sumamos $\int_a^c f(t) dt$ en todos los términos de las desigualdades (E1) y (E2) obtenemos:

si $c < x$:

$$\int_a^x f(t) dt - k(x-c) \leq \underbrace{\int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt}_{F(x)} \leq \int_a^x f(t) dt + k(x-c)$$

Si $x < c$:

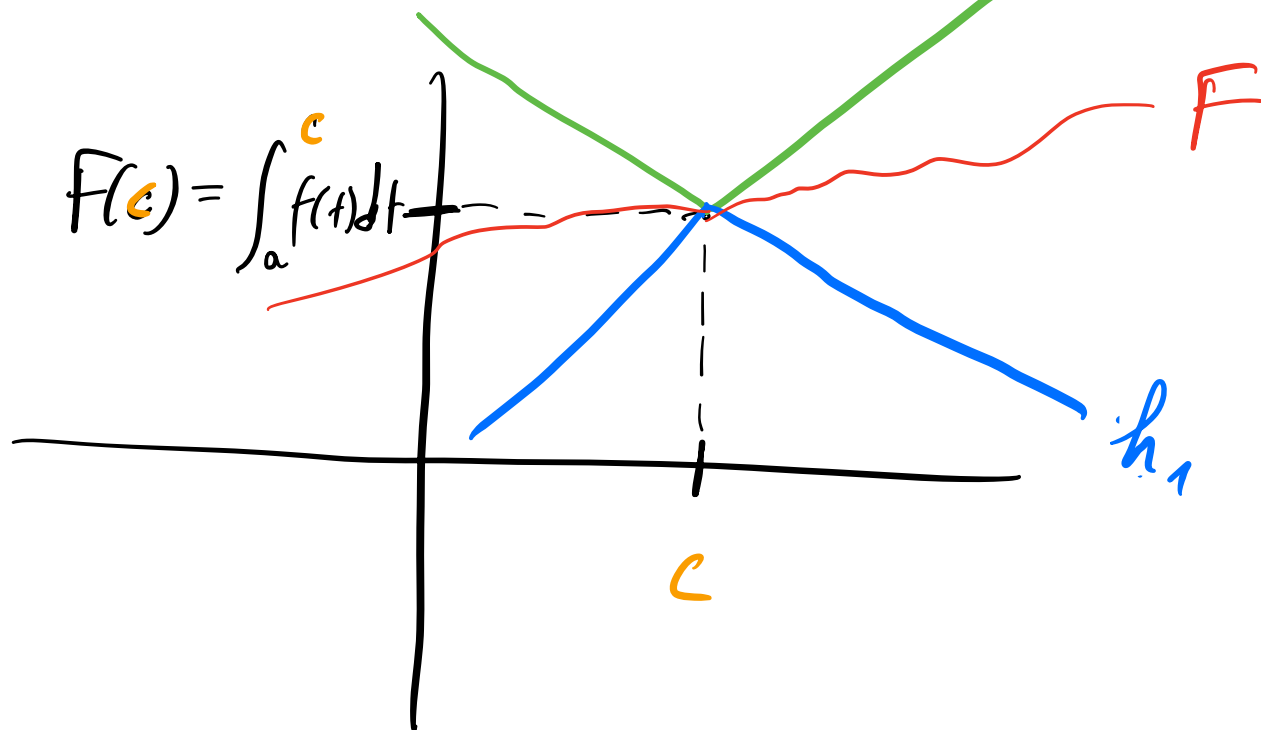
$$\int_a^c f(t) dt + k(x-c) \leq F(x) \leq \int_a^c f(t) dt - k(x-c)$$

Vamos a definir:

$$h_2(x) = \begin{cases} \int_a^c f(t) dt + k(x-c) & \text{si } x > c \\ \int_a^c f(t) dt - k(x-c) & \text{si } x < c \end{cases}$$

$$h_1(x) = \begin{cases} \int_a^c f(t) dt - k(x-c) & \text{si } x > c \\ \int_a^c f(t) dt + k(x-c) & \text{si } x < c \end{cases}$$

h_2



Como $h_1(x) \leq F(x) \leq h_2(x) \quad \forall x \in I$

$$\text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow c} h_2(x) = F(c)$$

Por el teorema del sandwich

concluimos que $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c)$,

es decir F es continua en c .

Como c es arbitrario, concluimos que F es continua.