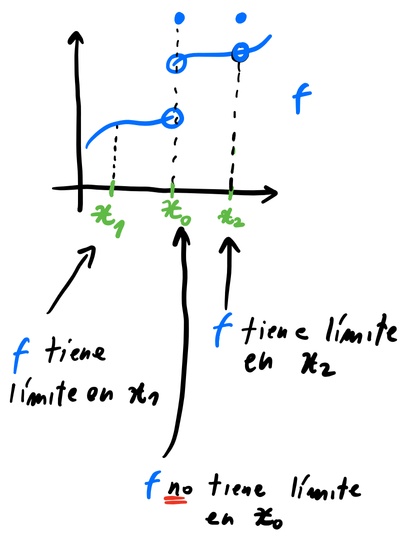
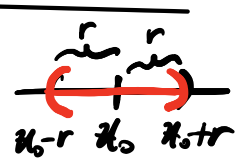
IDEA



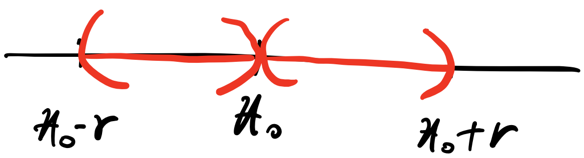
$$E(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - x_0| < r\}$$



$$E^*(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < |x - x_0| < r\} =$$

$$= (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$$

Se llama entorno <u>reducido</u> de centro x_0 y radio r

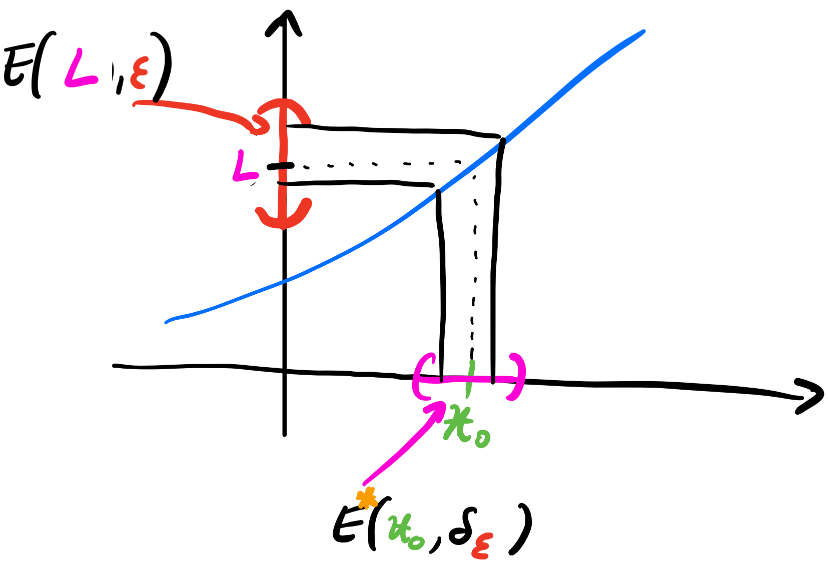


Otra forma:

$$E^*(x_0, r) = E(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que f tiene límite L en x_0 si:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_\varepsilon>0 \,/\, f(x)\in E(L,\varepsilon)\ \forall x\in E^*(x_0,\delta_\varepsilon)\cap I$$



Cuando f tiene límite L en x_0 escribimos:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L}$$

o también

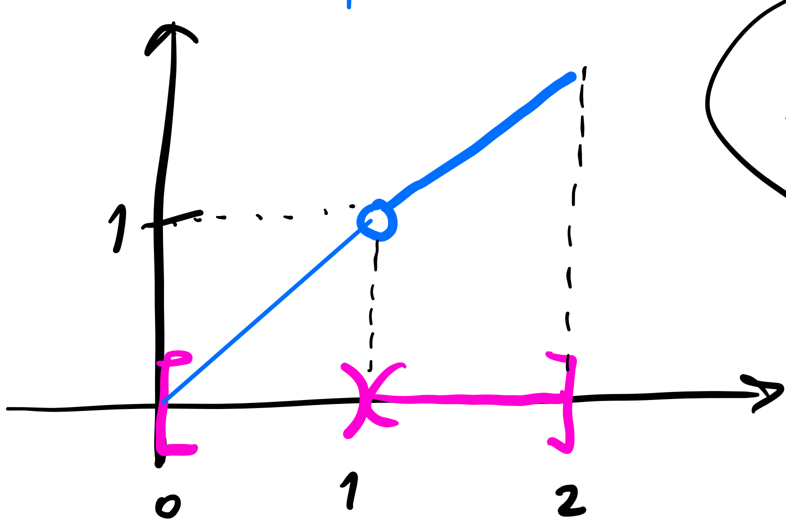
$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L}$$

Proposición: f es continua en x_0 $\Longleftrightarrow$ Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y es igual a $f(x_0)$

Obs: Para estudiar el límite en un punto de una función, no es necesario que la función esté definida en el punto.

Ej: $f : [0,2] \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ /

$f(x) = x$



$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

- En este caso no tiene sentido hablar de la continuidad en 1 porque f no está definida en 1.

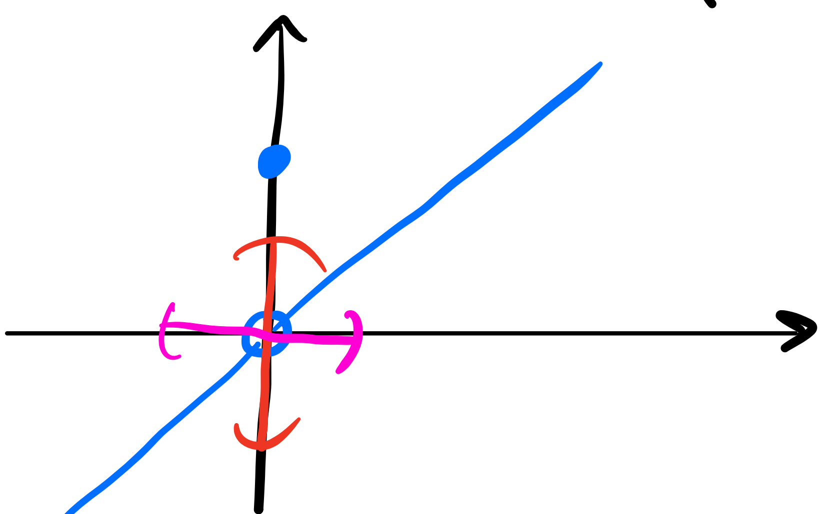
- Sí tiene sentido estudiar la continuidad en 0.

En este caso $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Por lo que f es continua en 0.

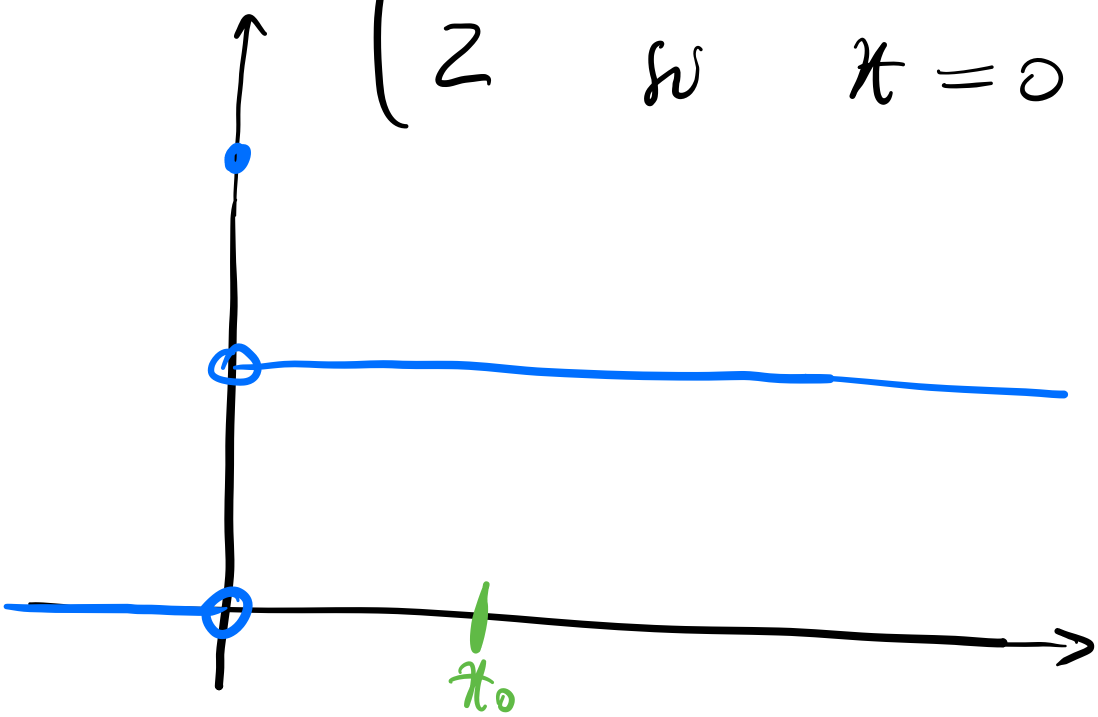
Ejemplos:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$ pero no es continua en 0.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



f no tiene límite en 0.

$\underbrace{f \text{ es continua en } x_0,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}$

se puede decir: f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Propiedades del límite

Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Además $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$$

Entonces:

1) Existe $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x)$ y

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = L_1 + L_2$$

2) Existe $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$

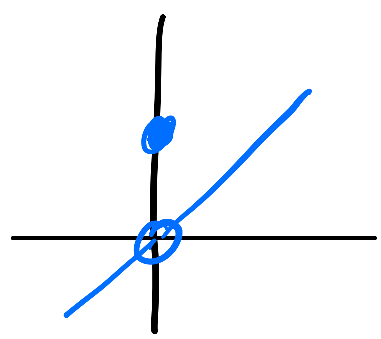
3) Si $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

y $L_2 \neq 0$

Entonces existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$

Obs: De 2) + 3) podemos deducir que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

(siempre que $g(x) \neq 0 \ \forall x$
$L_2 \neq 0$)



Para ver esto observar que

$$\frac{f}{\;} = f \cdot \frac{1}{\;}$$

g $\qquad$ g

Propiedades de la continuidad

Sean $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Supongamos que f y g continuas en x_0. Entonces:

1) $f+g$ cont. en x_0

2) $f \cdot g$ cont. en x_0

3) $\dfrac{f}{g}$ cont en x_0 $\left(g(x) \neq 0 \ \forall x\right)$

Entonces suma, producto, resta, cociente de continuas es continua

Ej: Sabemos que

$f(x) = x$ es continua

$g(x) = k$ (cte) es continua.

entonces $h(x) = kx$ es continua

$h_2(x) = x^3$ es continua

Ej: $7x^3+35x^2-7x+1$

es continua por ser suma de productos de funciones continuas

Prop: (toda función polinómica es continua)

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

entonces P es continua

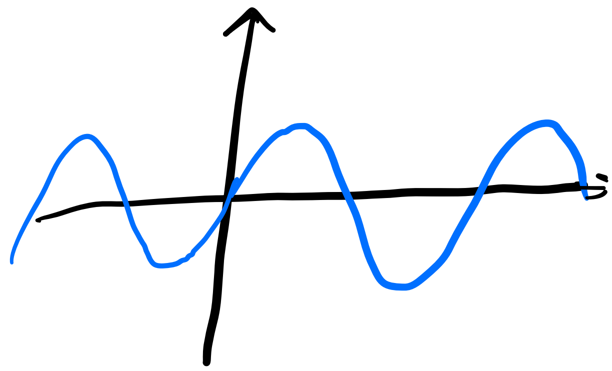
Más propiedades

La composición de funciones continuas es continua. Si

f y g son continuas entonces

$f(g(x))$ es continua.

Ej: $f(x) = \text{sen}(x)$



$g(x) = x^2 + x + 1$

f y g son continuas. Entonces

$f(g(x)) = \text{sen}(x^2 + x + 1)$ es continua

(Aclaración: asumiremos que las funciones trigonométricas son continuas)

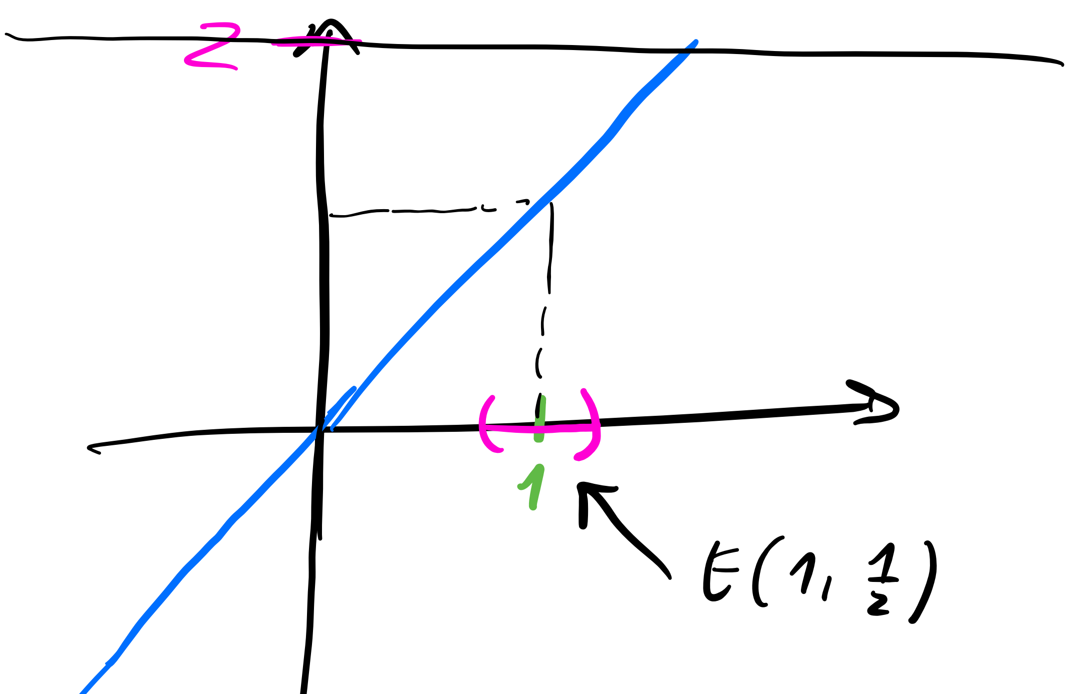
Ej: $\cos(7x^3 - 5) + \dfrac{1}{x^2+1}$

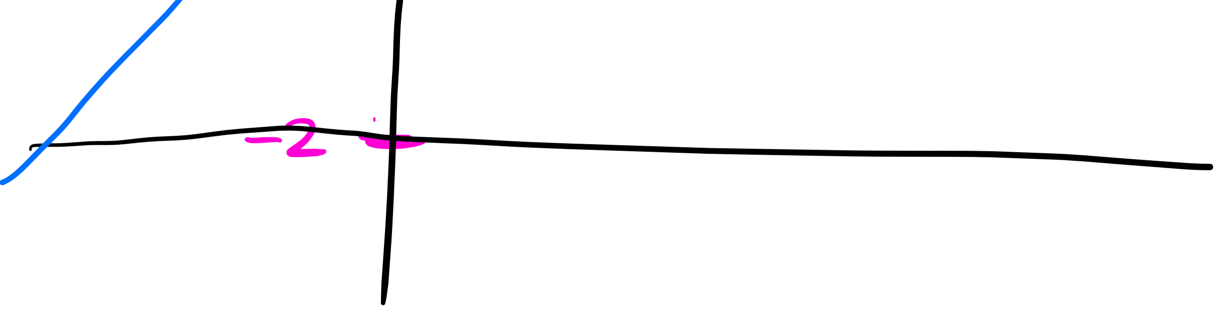
es continua en $\mathbb{R}$

Def: Decimos que f está acotada en un entorno de x_0 si

$$\exists\, K>0,\ \exists\, \delta>0 \,/\, |f(x)|<K \quad \forall x \in E(x_0,\delta)$$

Ej: $f(x)=x$ está acotado en un entorno de 1.





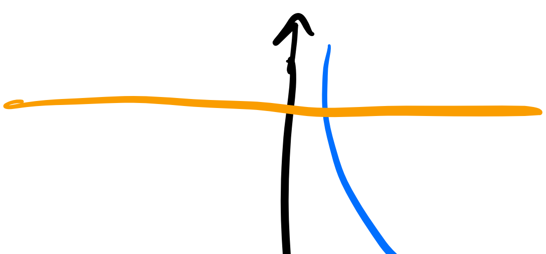
En este caso, si $x \in E(1, \frac{1}{2})$

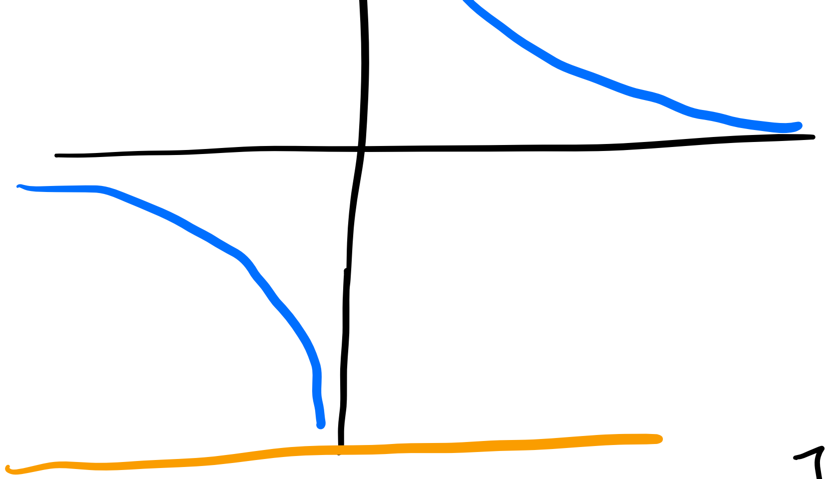
$\Rightarrow f(x) \in E(1, \frac{1}{2})$

y por lo tanto $|f(x)| < 2$.

- En general, si f tiene límite o es continua en x_0 entonces está acotada en un entorno de x_0

- $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1/x$ **NO** está acotada en un entorno de 0.





Para cualquier $k>0$
y cualquier $\delta>0$,
$\exists\ x\in E(0,\delta) / |f(x)|>k$

Propiedad del límite

("Acotado x tiende a 0 tiende a 0")

$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ y g está acotada en un entorno de x_0

Entonces $\lim_{x\to x_0} f.g(x)=0$

Ej: $f,g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$

$f(x)=x \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$

$g(x)=1/x$

$$\lim_{x\to 0} f\cdot g(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0$$

En este caso no se cumple que $\lim_{x\to 0} f\cdot g = 0$ porque

g no está acotada en un entorno de 0.
