Práctico 4: Formas normales. Interpretación. Modelos.

Ejercicio 1 [Fundamental]

Una fórmula **F** está en *forma normal disyuntiva*, si y solo si **F** es de la forma:

$$F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$$

en donde cada $\mathbf{F_i}$ es una conjunción de literales. Transforme a forma normal disyuntiva las siguientes fórmulas:

- $(\neg p \wedge q) \rightarrow r$
- $p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow s)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
- $\neg (p \vee \neg q) \wedge (s \rightarrow t)$
- $\neg (p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

Ejercicio 2 [Fundamental]

Una fórmula **F** está en *forma normal conjuntiva*, si y solo si **F** es de la forma:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$$

en donde cada $\mathbf{F_i}$ es una disyunción de literales. Transforme a forma normal conjuntiva las siguientes fórmulas:

- $\neg (p \rightarrow q)$
- $p \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
- $\neg (p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
- $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

Ejercicio 3 [Fundamental]

Sea la siguiente interpretación I:

Dominio: Naturales
s: función sucesor
a - 0
b - 1
p - $\{(x,y) : x > y\}$
q - $\{x : x > 0\}$
r - $\{(x,y) : x \bmod y = 0\}$

Para cada una de las siguientes fórmulas cerradas, determine el valor de verdad de la fórmula bajo la interpretación I.

- $\forall x\, \exists y\; p(x,y)$
- $\exists y\, \forall x\; p(x,y)$
- $p(s(a),b)$
- $\forall x\, (q(x) \rightarrow p(x,a))$
- $\forall x\; p(s(x),x)$
- $\forall x\, \forall y\, (r(x,y) \rightarrow \neg p(x,y))$
- $\forall x\, (\exists y\; p(x,y) \vee r(s(b),s(x)) \rightarrow q(x))$

Ejercicio 4 [Complementario]

Muestre que la siguiente fórmula no es válida:

$$\forall x\, \exists y\; p(x,y) \rightarrow \exists y\, \forall x\; p(x,y)$$

Ejercicio 5 [Opcional]
Considere la siguiente fórmula:

$$(\forall x\ p(x,x) \wedge \forall x\ \forall y\ \forall z\ [(p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z)] \wedge \forall x\ \forall y\ [p(x,y) \vee p(y,x)]) \rightarrow \exists y\ \forall x\ p(y,x)$$

a) Demuestre que toda interpretación con dominio finito es un modelo.
b) Encuentre una interpretación que no es un modelo.

Ejercicio 6 [Complementario]
Ningún vendedor de autos usados compra un auto usado para su familia. Algunas personas que compran autos usados para sus familias son absolutamente deshonestas. Pruebe que algunas personas absolutamente deshonestas no son vendedores de autos usados.

Ejercicio 7 [Fundamental]
a) Dé una interpretación que sea modelo y una que no lo sea para los siguientes programas lógicos:

i.
```
p ← q, r.
q.
r.
```

ii.
```
p ← q, r.
q ← s.
```

iii.
```
append(list(Prim,Resto), Xs, list(Prim,Resto2)) ← append(Resto,Xs, Resto2).
append(nil, Xs, Xs).
```

iv.
```
hijo(Hijo, Padre) ← padre(Padre, Hijo), varon(Hijo).
padre(juan, jose).
padre(jose, gabriel).
varon(juan).
varon(jose).
varon(gabriel).
```

b) ¿Un programa lógico siempre tiene modelo, o sea, es un conjunto de cláusulas satisfactible? Justifique.

Ejercicio 8 [Opcional] [prueba 02]
Dé una interpretación que sea modelo del siguiente conjunto de fórmulas:

$$C = \{\ p(a),\ p(b),\ q(a, b),\ \forall x\ \forall y\ ((p(x) \wedge p(y)) \rightarrow p(f(x, y))),$$
$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((q(x, z) \wedge q(y, z)) \rightarrow q(f(x, y), f(z, z)))\ \}$$